DIDAKTISCHE ANSÄTZE ZUM STOCHASTIKUNTERRICHT IN GRUNDSCHULE UND FÖRDERSTUFE

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Erziehungswissenschaften
an der
Pädagogischen Hochschule Ruhr
in
Dortmund

vorgelegt von
Dietger Heitele, Mengen

1975

Drucklegung: Februar 1976

Dissertationsdruck
Blasaditsch GmbH • 89 Augsburg 17 • Theodor-Heuß-Platz 3 • Telefon (0821) 51 85 63

Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe

Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Erziehungswissenschaften

an der

Pädagogischen Hochschule Ruhr

in

Dortmund

vorgelegt von

Dietger Heitele, Mengen

Drucklegung: Februar 1976

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referenten: Prof. Dr. Erich Wittmann
Prof. Dr. Gerhard Müller
Prof. Dr. Heinrich Winter

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Oktober 1975

Meiner Mutter !

V o r w o r t

Wie vermutlich die meisten Mathematiker, die sich der Fachdidaktik verschreiben, mußte ich zu Beginn meiner Arbeit die schmerzliche Feststellung machen, daß es in der Fachdidaktik - anders als beispielsweise in der Mathematik - keine geschlossene und weithin anerkannte Methodologie für das Abfassen fachdidaktischer Publikationen gab und im übrigen m.E. bis heute nicht gibt. Eindimensionales, weithin von der mathematischen Strukturanalyse bestimmtes Argumentieren oder ad-hoc-Produktion von Unterrichtsaktivitäten, um zwei Extreme zu nennen, schienen mir jedenfalls dem eigentlich integrativen Anspruch der Mathematikdidaktik prinzipiell nicht gerecht zu werden. Es war mir auch keine fachdidaktische Arbeit bekannt, die sich zum Ziel gesetzt hätte, ein so komplexes mathematisches Gebiet wie die Stochastik sowohl aus fachlicher und grundlagentheoretischer als auch aus psychologischer, pädagogischer, methodisch-kritischer, unterrichtspraktischer und unterrichtskonstruktiver Sicht integrativ zu reflektieren. Somit bestand zunächst die größte Schwierigkeit darin, einen geschlossenen Rahmen zu finden, der es mir ermöglichen sollte, mich der ganzen Komplexität des in den letzten Jahren hoch-aktuell gewordenen Themas zu stellen.

In diesem Bewußtseinsstatus gab mir Prof. Dr. E. Wittmann die entscheidende Anregung, die in Bruners Buch "The Process of Education" enthaltenen Curriculumsthesen für die fachdidaktische Strukturierung auszunutzen. Inwiefern die weiteren Gedankengänge in ihrem Aufbau damit fast zwangsläufig bestimmt wurden, habe ich ausführlich in der Einleitung niedergelegt. Die Arbeit erhebt nicht den Anspruch, ein abschließendes Urteil darüber abzugeben, ob und falls ja, wie die Stochastik in den Stoffkanon des Primarbereichs hinein soll. Hierzu dürften

weitere gezielte empirische Untersuchungen erforderlich sein, die über die von mir (im Text nicht explizit referierten) und anderen durchgeführten punktuellen Unterrichtsversuche hinausgehen. Ich hoffe, daß die vorliegende Arbeit für eine hierfür nötige und m.E. bislang nicht bestehende Basis geeignet ist.

Abschließend möchte ich all denen danken, die zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen haben, wobei ich u.a. Prof. Dr. N. Knoche, Prof. Dr. G. Müller und Prof. Dr. H. Winter nennen möchte, die kritische und weiterführende Anmerkungen machten. Ganz besonders verpflichtet bin ich Prof. Dr. E. Wittmann, der sich immer wieder um den Fortgang der Arbeit kümmerte und in teilweise langen Diskussionen und Briefwechseln die einige Male ins Stocken geratene Arbeit durch neue Impulse und Anregungen wieder voran brachte.

Dortmund, Februar 1976 Dietger Heitele

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung Seite 1

I. Kapitel
Struktur der Wahrscheinlichkeitsrechnung ("fundamental ideas")

Vorbemerkungen 5

1. Zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung 8

2. Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1. Zufallsexperiment und Ereignisraum 19

2.2. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff 23

2.2.1. LAPLACEsche Wahrscheinlichkeitsrechnung 23

2.2.2. Die Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeit (v. MISES) 28

2.2.3. Der axiomatische Aufbau 31

2.2.4. Das Problem der Anwendung 36

2.2.5. Philosophische Probleme beim Studium und bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung 38

2.2.6. Der subjektivistische Standpunkt 42

2.2.7. Der objektivistische Standpunkt 46

2.3. Exemplarische Darstellung stochastischer Arbeitsweisen

2.3.1. Mehrstufige Experimente und bedingte Wahrscheinlichkeit 50

2.3.2. BAYESsche Methode 56

2.3.3. Zufallsvariable 59

2.3.4. Gesetze der großen Zahl 64

2.3.5. Monte-Carlo-Simulation 69

2.3.6. Kombinatorik 72

2.3.7. Statistische Verfahren 74

3.	Modell und Wirklichkeit	80
4.	Fundamentale Ideen, Probleme und Verfahren der Stochastik	91
4.0.	"Sachebene und Entwurfebene - distanzierte Rationalität"	94
4.1.	Normierung unseres Erwartungsgefühls	94
4.2.	Das Wahrscheinlichkeitsfeld	94
4.3.	Disjunktive Verknüpfung von Ereignissen - Additionsregel	95
4.4.	Verknüpfung von Zufallsexperimenten - Unabhängigkeit	96
4.5.	Gleichverteilung - Symmetrie	97
4.6.	Kombinatorische Ideen	98
4.7.	Das Urnenmodell - Simulation	99
4.8.	Zufallsvariable	100
4.9.	Gesetz der großen Zahl	101
4.10.	Stichprobenverfahren	102
	Schlußbemerkungen	104

II. Kapitel
Entwicklungs- und lernpsychologische Randbedingungen für ein Stochastikcurriculum

	Einleitung und Übersicht	105
1.	Befunde und Hypothesen PIAGETs zur kognitiven Entwicklung	
1.1.	Allgemeine Aussagen	108
1.2.	PIAGETs Befunde zur Entwicklung stochastischer Ideen beim Kind	111
1.2.1.	Versuch zur "irreversiblen Mischung"	113
1.2.2.	BERNOULLIverteilungen ("zentrierte Verteilungen")	115
1.2.3.	Gleichverteilung ("Regenfall")	119
1.2.4.	"Zufällig - nicht zufällig"	122
1.2.5.	Urnenziehungen	127
1.2.6.	Urnenvergleiche	129
1.2.7.	Kombinatorik	133

2. Kritische Wertung der PIAGET-INHELDERschen Befunde und neuere Forschungsergebnisse
2.1. Kritik der PIAGET-INHELDERschen Versuchstechnik 135
2.2. Übersicht über neuere Ergebnisse 138
2.3. Wahrscheinlichkeitslernen ("probability learning") 138
2.4. Befunde von YOST/SIEGEL/ANDREWS, DAVIES, PIRE, COHEN, FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT u. a. 141
3. Kritische Wertung und Résümée zu den entwicklungspsychologischen Befunden 145
4. Erwachsene in stochastischen Situationen 147

III. Kapitel
Didaktische Grundzüge eines Stochastikcurriculums in Primar- und Förderstufe

Einleitung und Übersicht 156
1. Kognitive Entwicklung und Mathematikunterricht 157
2. Der Begriff "Intuition" 164
2.1. Vorläufige Begriffserklärung 164
2.2. Bedeutung intuitiver Modelle in der Mathematik und den Naturwissenschaften 167
2.3. Genese intuitiver Modelle 173
3. Stochastische Intuition - stochastisches Denken 175
3.1. Stochastische Intuition 175
3.2. Stochastisches Denken 179
4. Die Curriculumspirale 186
5. Bedeutung didaktischer Prinzipien in einem frühen Stochastikcurriculum 194

IV. Kapitel

"Materialien"

Einleitung und Überblick		199
1.	Stochastik im Spiegel der fachdidaktischen Literatur (geschichtlicher Rückblick)	201
1.1.	Entwicklung bis 1960	201
1.2.	Der strukturmathematische Ansatz	207
1.3.	Der "spiralige" Ansatz des Stochastikunterrichts (ENGEL, VARGA, FISCHBEIN, WINTER)	208
1.4.	Neueste Entwicklungen	216
2.	Allgemeine Forderungen an einen frühen Stochastikunterricht	218
3.	Konstruktion von Aktivitäten und Problemkontexten zu fundamentalen stochastischen Ideen	230
3.0.	Konkrete Materialien und Zufallsgeneratoren (Übersicht)	232
3.1.	Normierung unseres Erwartungsgefühls	234
3.2.	Das Wahrscheinlichkeitsfeld	236
3.3.	Disjunktive Verknüpfung von Ereignissen - Additionsregel	240
3.4.	Verknüpfung von Zufallsexperimenten - Unabhängigkeit	242
3.5.	Gleichverteilung - Symmetrie	253
3.6.	Kombinatorische Ideen	257
3.7.	Urnenmodell - Simulation	265
3.8.	Zufallsvariable	269
3.9.	Aussagen der großen Zahl	276
3.10.	Die Idee der Stichprobe	278

4.	Ausgewählte Probleme und Fragestellungen zur Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung	286
4.1.	Stochastische Problemsituationen ganzheitlicher Natur	286
4.2.	Die Bedeutung von Spielen im frühen Stochastikunterricht	290
4.2.1.	Allgemeine Gesichtspunkte	290
4.2.2.	Glücksspiele - strategische Spiele	292
4.3.	Stochastische Problemsituationen im Kontext anderer mathematischer Stoffe	298
4.3.1.	Problemstellung	
4.3.2.	Stochastik und Bruchrechnung	300
4.3.2.1.	Anwendung der Bruchrechenoperationen in der Stochastik	300
4.3.2.2.	Frühe Bruchrecheninszenierung durch stochastische Problemsituationen	302
4.3.3.	Stochastik und Stellenwertsysteme	303
4.3.4.	Stochastik und Geometrie	304

Résümée:		309
1.	Illustrierung des BRUNERschen Rahmens durch das Beispiel "Stochastik"	310
2.	Anreicherung spezifischer fachdidaktischer Arbeit durch den allgemeinen BRUNERschen Rahmen	313
2.1.	Der methodologische Status fundamentaler Ideen für die Fachdidaktik	313
2.2.	"Korrespondierende Verfahren" als fachdidaktische Methoden	317
Literatur		320

EINLEITUNG

Im September 1959 tagte von WOODS HOLE (USA) eine bis dahin einzigartige Konferenz von ca. 35 Wissenschaftlern über grundlegende Verbessergungen des schulischen Unterrichts- darunter Pädagogen, Psychologen, Mediziner, aber auch Mathematiker, wie B. BEGLE und P. C. ROSENBLOOM. Auf Grund der Tagungsergebnisse erstellte J. S. BRUNER zunächst einen "chairman's report", aus dem 1960 das durch eigene Ideen stark gefärbte Buch "The process of education" entstand, das in der Folgezeit die moderne Curriculumentwicklung, vor allem im mathematischen Bereich stark beeinflußt hat. SHULMAN (1970, S. 25) beschreibt die Bedeutung des Buches folgendermaßen:

> "No single work embodied the letter and spirit of that psychology which undergirds the new curricula as did Bruner's short distillation of the deliberations of a conference of scientists and educators... Although we have come to associate with Bruner such ideas as discovery, structure, early readiness, and intuitive thinking, his writings did not initially stimulate those early renovative efforts in mathematics education. Yet, at the end of the 1950's, he managed to capture their spirit, provide them with a framework of cognitive theory, and stimulate the development of their later forms and eventual successors."

W. LOCH faßt in seinem Vorwort zur deutschsprachigen Ausgabe "Der Prozess der Erziehung" BRUNERS Hauptaussagen sehr prägnant zusammen.

> "Erstens: die Konstruktion neuer Curricula erfordert die Mitarbeit der führenden Forscher der Wissensgebiete, die den Unterrichtsfächern zugrundeliegen. - Zweitens: das entscheidende Unterrichtsprinzip in jedem Fach oder jeder Fächergruppe ist die Vermittlung der Struktur, der 'fundamental ideas' der jeweils zugrundeliegenden Wissenschaften und die entsprechende Wiederholung der Einstellung des Forschers durch den Lernenden, dessen Bemühungen, wie bescheiden sie auch sein mögen, sich nicht der Art, sondern nur dem Niveau nach von der in einer bestimmten Wissenschaft geforderten Forschungshaltung unterscheiden. - Diese Grundlagen eines Faches können drittens jedem Menschen, gleich welcher Altersstufe und sozialen Herkunft auf der Grundlage der Denk- und Darstellungsmittel, die er mitbringt, in einfacher Form vermittelt werden. - Das erfordert viertens einen 'spiraligen' Aufbau des Curriculums, der eine Wiederholung der Grundbegriffe auf den verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus ermöglicht bis hin zu den abstrakten, formalisierten Operationen der wissenschaftlichen Begriffsbildung. - Fünftens: der

> Aufstieg des Lernenden von den konkreten zu den formalen Operationen wird ermöglicht und erleichtert durch die antizipierende Funktion des intuitiven Erfassens von Zusammenhängen, das die Konzepte entwirft, die das analytische Denken ausarbeitet; deshalb ist diese Grundform des Denkens gerade auf den elementaren Stufen des Unterrichts besonders zu kultivieren. - Sechstens: die entscheidenden Motive des Lernens erwachsen nicht aus der Leistungsorientierung und dem Konkurrenzstreben der gegenwärtigen Gesellschaft, sondern aus dem Interesse an den Gegenständen des Lernens selbst, das allerdings nur auf dem Wege des aktiven Nachvollzugs ihrer Strukturen geweckt werden kann."

Formal ist das BRUNERsche Buch in sechs Kapitel eingeteilt. Die ersten beiden beschäftigen sich mit der Rolle der Struktur beim Lernen eines Wissensgebietes. Das dritte Kapitel ist der Bereitschaft ("readiness") zum Lernen und den Möglichkeiten einer gezielten Instruktion gewidmet. Im vierten Kapitel geht BRUNER auf den Begriff des intuitiven Denkens und seiner Bedeutung für den Lernenden ein, im fünften auf die Lernmotive und die Möglichkeiten, beim Schüler Interesse zu wecken. Gegenstand des sechsten Kapitels schließlich sind Unterrichtsmaterialien.

Obwohl BRUNERs Buch sicher nicht den Anspruch erhebt, direkte Vorbilder für den Unterricht zu liefern, bestehen enge Bezüge zu spezifischen Unterrichtsmodellen wie denen von GLASER[1], von HEIMANN/OTTO/SCHULZ (1972, S. 13f) oder WITTMANN (1974, S. 25, 124). Tatsächlich sind diese Bezüge nicht zufälliger Natur, sondern in der Sache begründet. Während jedoch Unterrichtsmodelle einen Rahmen für die Erstellung von Unterrichtseinheiten liefern, erstellt BRUNER einen allgemeinen Rahmen für die Entwicklung langjähriger Curricula vom Kindergarten (bzw. Vorschule) an bis zur Hochschule.

Dies führt nun zu einer ernsthaften Frage: die Fachdidaktiken arbeiten an der Entwicklung und Analyse konkreten Unterrichts. Daher haben sie an einer allgemeinen erziehungswissenschaftlichen Erörterung nicht so sehr ein Interesse, sondern betrachten eine solche hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt der Anwendbarkeit auf konkrete Beispiele. Für die Mathematikdidaktik stellt sich speziell die Frage, ob BRUNERs Ansatz fruchtbar für die Erstellung von Mathematikcurricula zu speziellen

---

1) in: DE CECCO 1968, S. 11

mathematischen Inhalten ist.
Genau hier liegt das Motiv für die vorliegende Arbeit. Im BRUNERschen Rahmen soll ein spezieller mathematischer Inhalt, nämlich die Stochastik, unter einer doppelten Blickrichtung didaktisch strukturiert und bearbeitet werden. Einmal soll der Rahmen dazu herangezogen werden, um das Beispiel (=Stochastik=) zu beleuchten. Zum anderen soll das Beispiel dazu dienen, den Rahmen zu illustrieren. Angestrebt wird also eine gegenseitige Befruchtung allgemeiner (fach-)didaktischer und spezieller didaktischer Aspekte. Der Stochastikunterricht in der Grundschule und Förderstufe wurde als Beispiel gewählt, weil er erst in den letzten Jahren Gegenstand intensiver mathematikdidaktischer Arbeit gewesen ist und an einer Zusammenfassung der bisher erzielten Resultate auch an sich Interesse besteht.

Die Gliederung der Arbeit ergibt sich aus obigen Überlegungen ganz naturgemäß. Im ersten Kapitel werde ich den Gegenstand "Wahrscheinlichkeit" auf seine Struktur hin untersuchen. Ziel dabei ist es, einerseits die fundamentalen Ideen, Verfahren und Denkweisen in diesem Fach herauszuschälen, andererseits hinwiederum damit den BRUNERschen Begriff der "fundamental idea" (und seine Problematik) zu beleuchten.
Im zweiten Kapitel werde ich das Verhalten des Individuums in stochastischen Situationen auf Grund der vorliegenden entwicklungspsychologischen Befunde schildern. Ziel hierbei ist unter anderem, zu klären, in welchem Alter und für welchen Stoff der Wahrscheinlichkeitsrechnung Lernbereitschaft ("readiness") angenommen werden darf.
Im dritten Kapitel werden grundsätzliche didaktische Möglichkeiten untersucht, wie man (schon sehr früh) dem Gegenstand und dem Kinde gerecht werden kann. Dies führt, wie sich zeigen wird, zu einer ausführlichen Diskussion der Begriffe "stochastische Intuition", "stochastisches Denken" und "Curriculumspirale". Dieses Kapitel entspricht seiner Stellung nach BRUNERs Kapitel IV sowie dem zweiten Teil von III.
Im vierten Kapitel werden von Mathematikdidaktikern gebahnte Wege aufgewiesen, wie man mit geeigneten Materialien im Unterricht von Grund- und Förderstufe den Stoff der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf geeignete Repräsentationsebenen transformie-

ren kann. Dieses Kapitel bezieht sich auf BRUNERs Kapitel VI "Unterrichtshilfen" mit dem Unterschied, daß ich "Unterrichtshilfen" weiter fassen möchte als BRUNER, der darunter vorwiegend nur solche technischer Art (Videorekorder, Tageslichtprojektor etc.) versteht. Weiterhin sollen in diesem Kapitel zusammenfassend allgemeine Grundzüge und Charakteristika eines kontinuierlichen Stochastikcurriculums diskutiert werden, wie sie sich aus den vorigen Kapiteln ergeben. Der Charakter der Mathematikdidaktik als typischer Grenzwissenschaft zwischen verschiedenen Fachdisziplinen[2] wird sich deutlich darin zeigen, daß in diesem letzten Kapitel, in dem konkrete Unterrichtsangebote entwickelt werden, gewissermaßen "an allen Fäden gezogen werden" muß.

2) vgl. die Graphik bei WITTMANN 1974, S. 1-2, die die Stellung der Mathematikdidaktik zu ihren Bezugswissenschaften (Mathematik, allgemeine Didaktik etc.) zeigt.

I. Struktur der Wahrscheinlichkeitsrechnung
("fundamental ideas")

Vorbemerkungen

Zum Entwurf von Stochastikunterricht - wie überhaupt jeden Mathematikunterrichts - gehört die Analyse des Stoffes. Dies ist ein unumstrittener Grundsatz, der sich sowohl in den meisten Modellen zur Unterrichtsplanung[4] findet. Der Ausgangspunkt didaktischer Arbeit ist somit in der Regel die Praxis der Fachwissenschaftler, über die in der Fachwelt im großen und ganzen Konsens besteht. Im Einzelfall sollte man von dieser Regel nur abweichen, wenn es außergewöhnliche Gründe gibt - eine Entscheidung, bei der Kontroversen nicht auszuschließen sind. Aus diesem Grunde ist eines der Hauptanliegen BRUNERs[5], daß auch hervorragende Fachwissenschaftler neben den Vertretern der Psychologie und der pädagogischen Wissenschaften an der Konzipierung mathematischer Curricula mitarbeiten sollen. Dies ist, von wenigen Ansätzen abgesehen[6], in Deutschland kaum der Fall. Der Fachdidaktiker ist meist gezwungen, sich an Hand der Fachliteratur über die Struktur der mathematischen Sachgegenstände selbst zu informieren.

Nun ist die Frage nach ser "Struktur" eines Fachgebietes wie der Stochastik viel zu allgemein[7] und muß feiner gestellt werden, etwa in folgender Form:

> Welche idealtypischen Vorstellungsweisen, welche fundamentalen Grundstrukturen, Begriffe und Definitionen mit großem Erklärungswert im BRUNERschen Sinne lassen sich in der Stochastik erkennen?

Dabei meine ich mit "Stochastik" nicht ein Stück "fertige Ma-

---

3) vgl. HEIMANN u. a. 1972, S. 13f WITTMANN 1974, S. 124
4) vgl. Analysen zum Sinn und Bedeutung der Fachdidaktik in ZDM 1974, S. 109f
5) BRUNER 1970, S. 32
6) Hier wären etwa die in unregelmäßigen Abständen stattfindenden Tagungen zum Unterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Oberwolfach zu nennen, an der stets sowohl Wahrscheinlichkeitstheoretiker als auch Fachdidaktiker und Lehrer beteiligt sind.
7) es zeigt sich regelmäßig, daß Autoren bei so allgemeiner Fragestellung auch meist nicht über genauso allgemeine Erörterungen hinauskommen. Bei Beispiel hierfür ist etwa SCHWAB (1973)

thematik", wie sie als Endprodukt einer jahrhundertealten Entwicklung in manchen modernen Darstellungen zu finden ist. FREUDENTHAL (1973/74, S. 110f) zeigt zu deutlich die Gefahren einer solchen statischen Sichtweise für den Mathematikunterricht, und so ist es heute weithin üblich geworden, die Motivationen, die zur Theoriebildung in einem mathematischen Gebiet geführt haben, als notwendige Voraussetzung für das Verstehen der Theorie zu betrachten. DRESS (1974, S. 130) schreibt dazu:[8]

> "Mathematik ist als lebendiger Prozess nur im Zusammenhang ihrer geschichtlichen Entwicklung zu erfassen... Ein jeder Lehrgang sollte aus einer souveränen Kenntnis der geschichtlichen Entwicklung des jeweiligen Themas heraus konzipiert werden."

Interessanterweise haben sich gerade in der Stochastik profilierte Fachwissenschaftler wie GNEDENKO (1968, S. 358f), RENYI (1969, S. 79ff) oder DE FINETTI (1972, S. 157f) alle recht detailliert mit der Geschichte ihres Fachgebietes auseinandergesetzt.

Ein weiterer Grund für mich, zu Beginn einer fachdidaktischen Arbeit, die Geschichte der Stochastik zu streifen, besteht in folgendem: Die bekannte HÄCKEL'sche These, deren sich auch Mathematiker wie THOM (1972, S. 206) in ihrer Argumentation zuweilen bedienen, sagt aus, daß die Ontogenese die Phylogenese wiederhole. Ähnliches drückt auch PIAGET im Rahmen seiner genetischen Erkenntnistheorie aus, daß nämlich die Mechanismen der Genese von Wissen im Individuum und in der Geschichte der Wissenschaften die gleichen seien. Auch wenn man diesen Aussagen mit einer gewissen, zum Teil sicher berechtigten Skepsis gegenübersteht[9], so sind doch weitreichende Analogien zwischen den beiden Bereichen (Phylogenese und Ontogenese) nicht zu leugnen. Es sei an dieser Stelle schon bemerkt, daß z. B. manche inadäquate stochastische Vorstellungen, wie man sie bei Kindern findet, in der Vergangenheit durchaus Gegenstand ernsthafter wissenschaftlicher Diskussion gewesen sind.

Es erscheint deswegen vernünftig, die Thesen von HÄCKEL und PIAGET als Aufforderung zu betrachten und zu prüfen, ob die

---

8) Ähnliche Aussagen treffen auch V. JOHN 1884, S. 3 und J. PIAGET 1973, S. 10

9) vgl. Gegenargumente von WINKELMANN 1974, S. 271

Ideen der Stochastik, die in der Geschichte einen großen Fortschritt bewirkt haben, auch für einen fachdidaktischen Ansatz von Relevanz sind.

Noch ein anderer Punkt muß schon zu Beginn besonders hervorgehoben werden: Zum Verständnis der Stochastik reicht es nicht aus, die mathematische Theorie allein zu überblicken. Ebenso wichtig ist es, die "Handhabung der Theorie als Methode"[10] zu kennen, FELLER (1968, S. 1) schreibt hierzu:

> "In each field we must carefully distinguish three aspects of the theory: (a) the formal logical content, (b) the intuitive background, (c) the applications. The character, and the charm of the whole structure cannot be appreciated without considering all three aspects in their proper relation."

Es ist kein Zufall, daß diese Zeilen von einem der profiliertesten Stochastiker stammen. Gerade in der Stochastik scheint mir eine Trennung von Theorie und Methodologie, aus Gründen die ich im folgenden noch näher beleuchten werde, vom fachdidaktischen Standpunkt nicht nur gefährlich, sondern sogar unzulässig. Wahrscheinlichkeitsrechnung muß unter allen Umständen als Einheit von "Theorie und Werkzeug" gesehen werden.

Deswegen wird die Beziehung zwischen Mathematik und Realität im folgenden Kapitel einen breiten Raum einnehmen.

---

10) Der Ausdruck stammt von OTTE 1974, S. 90

1. Zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die meisten mathematischen Disziplinen hatten als Ausgangspunkt die Beschäftigung mit praktischen Problemen. Erst allmählich wurden die an singulären Problemsituationen gewonnenen Erfahrungen zu grundlegenden mathematischen Ideen konzentriert. Bestand diese so entstehende Mathematik nach V. D. WAERDEN (1956, S. 147) anfänglich noch aus einer mehr oder weniger ungeordneten Sammlung von Beispielen und Rechenvorschriften, so kam später das Bedürfnis nach Systematisierung und Formalisierung des Wissens dazu, um es leichter tradieren zu können. Schon sehr früh steckte aber auch ein anderes Ziel dahinter, nämlich Mathematik als "Theorie möglicher Welten" (PEIRCE) zu betreiben, d. h. unabhängig von den Anwendungen durch Überlegungen innerhalb der Theorie zu neuen Erkenntnissen zu gelangen und diese nachträglich wieder auf die reale Wirklichkeit anzuwenden. HILBERT hat diesen Prozess in seinem berühmten Vortrag auf dem Internationalen Mathematischen Kongress in Paris im Jahre 1900 sehr schön beschrieben:[11]

> "Bei der Weiterentwicklung einer mathematischen Disziplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermutigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbstständigkeit bewußt; er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äußere Anregung allein durch logisches Kombinieren, durch Verallgemeinern, Spezialisieren, durch Trennen und Sammeln der Begriffe in glücklichster Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt dann selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund... Inzwischen, während die Schaffenskraft des reinen Denkens wirkt, kommt auch wieder die Aussenwelt zur Geltung, zwingt uns durch die wirklichen Erscheinungen neue Fragen auf, erschließt neue mathematische Wissensgebiete und, indem wir diese neuen Wissensgebiete für das Reich des reinen Denkens zu erwerben suchen, finden wir häufig die Antworten auf alte ungelöste Probleme und fördern so zugleich am besten die alten Theorien. Auf diesem stets sich wiederholenden und wechselnden Spiel zwischen Denken und Erfahrung beruhen, wie mir scheint, die zahlreichen und überraschenden Analogien und jene scheinbar prästabilisierte Harmonie, welche der Mathematiker so oft in den Fragestellungen, Methoden und Begriffen verschiedener Wissensgebiete wahrnimmt."

---

11) abgedruckt in D. HILBERT, Gesammelte Abhandlungen Bd. III S. 291, New York 1965

Für die Mathematik geradezu typisch ist die Tatsache, daß Probleme, Definitionen und Sätze oft erst durch die Einbettung in eine Theorie verallgemeinerungs- und leistungsfähiger werden.[12]

Diese allgemeinen Entwicklungsmechanismen der Mathematik lassen sich ganz besonders in der Wahrscheinlichkeitsrechnung verfolgen. Dieser Meinung ist auch FELLER (1968, S. 3):

> "The history of probability ... shows a stimulating interplay of theory and applications; theoretical progress opens new fields of applications, and in turn applications lead to new problems and fruitful research."

Wenden wir uns nun nach diesen allgemeinen Erörterungen der geschichtlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu, deren Wurzeln in der Geschichte weit zurückreichen: Schon LUKREZ hielt es für denkbar, daß die Welt auf Grund zufälligen Zusammenwirkens der Urelemente sich so geformt hat, wie sie ist.[13] Wahrscheinlichkeitsaufgaben in expliziter Form sind indessen, nach allem was wir wissen, erst bei LUCA PACIULO (1445 - 1514) und in einem 1477 gedruckten Kommentar zu DANTEs Divina Commedia zu finden.[14] Zwei klassische Hauptprobleme, nämlich die Aufteilung der Einsätze bei einem vorzeitig abgebrochenen Glücksspiel und die Häufigkeiten gewisser Würfe mit drei Würfeln sind darin schon behandelt.[15] Auch bei CARDANO und GALILEI tauchen schon vereinzelt wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellungen zu ähnlichen Problemen in richtig gelöster Form auf.[16] Das Verdienst jedoch, ausgehend von solchen verstreuter und recht isolierten Aufgaben, die wohl nur den Charakter der Unterhaltung für intellektuelle Kreise hatten, einen neuen Zweig der Mathematik - "die Mathematik des Zufalls" - begründet zu haben, gebührt wohl FERMAT und PASCAL, denen RENYI (1969) in Gestalt eines fingierten Briefwechsels ein Denkmal gesetzt hat. Es schimmert bei PASCAL und FERMAT das Bedürfnis durch, in einem Bereich, in dem es kein absolutes Wissen gibt, durch die Mathematik wenigstens teilweises Wissen - oder um einen Ausdruck von GOETHE zu gebrauchen - "einen Schein von Wahrheit" zu erwerben[17] und so Ordnung in die Welt der Ungewissheit und des Zufalls zu bringen.

---

12) von S. BOLTZMANN stammt der schöne Satz: "Es gibt nichts praktischeres als eine gute Theorie" zit. nach OTTE 1974, S. 90
13) nach RENYI 1969, S. 79
14) nach: CANTOR 1965 II, S. 327
15) ibid
16) RENYI 1969, S. 79
17) zit. nach V. MISES 1928, S. 182

Während es den Vorläufern PACIULO, CARDANO u. a. nicht gelang, den Anstoß zu einer Mathematisierung des anstehenden Problemkreises zu geben, beginnt nun eine stürmische Entwicklung, auf Grund derer selbst eine Randfigur wie der Chevalier DE MERE zu unsterblichem Ruhm gelangt, nach MENGES (1968, S. 10) einfach deswegen, weil "er den richtigen Mann gefragt hatte." C. HUYGENS schreibt aus der Kenntnis des PASCAL-FERMATschen Briefwechsels heraus das wohl erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt, dessen Bedeutung, wie MENGES scherzhaft bemerkt, darin lag, daß es von J. BERNOULLI gelesen wurde.

Dieser schreibt dann auch das erste Lehrbuch, "Ars conjectandi", das 1713 herausgegeben wird und schon die Summenregel, die Produktregel sowie den Gedanken der Verteilung und das Gesetz der großen Zahl enthält. BERNOULLI definiert darin die Wahrscheinlichkeit als "Grad der Gewissheit , welcher sich zur Gewissheit wie der Teil zum Ganzen verhält." Er gibt auch eine mehr mathematische Definition, die in etwa der späteren LAPLACEschen entspricht[18] und sogar ein Kriterium für die Nachprüfung des in der Defintion vorkommenden Terminus "gleichmöglich" enthält. BERNOULLI erklärt die sechs Fälle beim Würfelwurf für "gleichmöglich", da "wegen der gleichen Gestalt aller Flächen und wegen des gleichmäßig verteilten Gewichtes des Würfels kein Grund vor handen ist, daß eine Würfelseite leichter als eine andere fallen sollte."[19] Es steckt darin implizit schon das fast 100 Jahre später von LAPLACE aufgestellte Prinzip "des unzureichenden Grundes". Überhaupt zeigen die damaligen Mathematiker nach RENYIs Ansicht schon ein hohes Maß an Reflexion, indem ihnen nämlich durchaus die Problematik der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition bewußt ist. RENYI (1969, S. 82)

> "Der Mangel dieser Definition besteht in Wirklichkeit nicht darin, daß ihr ein circulus vitiosus, eine 'petitio principii', innwohnt... sondern vielmehr darin, daß sie im Grunde keine Definition ist. Auf die Frage, was die Wahrscheinlichkeit wirklich ist, gibt sie nämlich keine Antwort; sie gibt nur eine praktische Anweisung, wie man die Wahrscheinlichkeit in gewissen einfachen Fällen berechnen kann.

---

18) RENYI 1969, S. 81

19) zit. nach CZUBER 1914, S. 12

> Die Schöpfer der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben den Sachverhalt auch in diesem Sinne aufgefaßt; als Definition der Wahrscheinlichkeit haben sie die von Bernoulli stammende oben zitierte Definition angesehen, nach der die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Grade der Gewissheit ist. Meistens aber haben sie es gar nicht für nötig gehalten, die Wahrscheinlichkeit ausdrücklich zu definieren; sie sahen die Wahrscheinlichkeit als einen Grundbegriff an, dessen Bedeutung keiner Erläuterung bedarf."

Der Zeitraum ab Mitte des 18. Jahrhunderts wird besonders fruchtbar für das Fortschreiten der neuen Wissenschaft. M. CANTOR (1965 III, S. 222) nennt diese Periode einen Zeitraum "... in dem die Wissenschaft in engste Beziehung zur Praxis tritt, zur Völkerwohlfahrt". Männer wie N. BERNOULLI, DE MOIVRE, EULER und vor allem BAYES, der wohl als erster nach der Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit einer Hypothese fragt, bereichern die entstehende Theorie. Allerdings werden auch Stimmen des Zweifelns laut, die an den Grundlagen rütteln. NIC. DE BEGUELIN rechnet die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Metaphysik[20] und D'ALEMBERT gar entfesselt einen leidenschaftlichen Streit um die Unabhängigkeit von Zufallsereignissen. "... ist schon neunmal Kopf gefallen, so ist es wahrscheinlicher, daß das nächste Mal Schrift fällt als wieder Kopf" meint D'ALEMBERT und hat durchaus Anhänger für seine These.[21]

Einen Markstein in der weiteren Entwicklung bildet das Buch "Théorie analytique de la probabilité" (1812), in dem LAPLACE die bis dahin vorliegenden Eregebnisse, Problemstellungen und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammenfaßt und ordnet, darüber hinaus aber mit Methoden der Analysis eine weitere Vertiefung bewirkt und zudem eine Neuorientierung auf die naturwissenschaftlichen Anwendungen einleitet.[22] Unter anderem leitet er her, daß die Normalverteilung ein Grenzfall der BERNOULLIverteilung ist. von LAPLACE stammt auch die klassische "Definition" der Wahrscheinlichkeit in ihrer expliziten Form:[23]

> "Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis der Zahl der günstigen Fälle zu der aller möglichen Fälle, wobei die verschiedenen Fälle als gleichmöglich vorausgesetzt werden."

---

20) CANTOR 1965 III, S. 222
21) ibid, S. 225
22) nach: MENGES 1968, S. 12
23) zit. nach HENGST 1971, S. 74

An anderer Stelle umschreibt LAPLACE den Terminus "gleichmögliche Fälle" mit den Worten, es seien Fälle "... über deren Dasein wir in gleicher Unwissenheit sind..." und man habe "... keinen Grund zu glauben, einer der Fälle werde eher eintreten als die anderen." (Prinzip des unzureichenden Grundes!)

GAUSS, POISSON, BERTRAND, TSCHEBYSCHEFF und MARKOFF, um nur einige wichtige Namen zu nennen, bauen die Theorie weiter aus, - ohne indessen den Blick für die Anwendungen zu verlieren -, und wenden sie an auf ein immer größer werdendes Feld von naturwissenschaftlichen Fragen und Problemen. Allerdings scheint allmählich die bis dahin immer noch vorherrschende Deutung der Wahrscheinlichkeit als "exspectatio" (BERNOULLI) nicht mehr ausreichend. SCHMETTERER (1957, S. 5) schreibt:

> "Aufbauend auf den noch durchaus in Gleichverteilungsvorstellungen befangenen Untersuchungen von R. Clausius, haben Maxwell und L. Boltzmann die statistische Betrachtung in die Gasdynamik eingeführt und den Rahmen der damaligen Wahrscheinlichkeitsrechnung gesprengt. Ganz deutlich spricht dies einmal M. v. Smoluchowski aus: 'Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist die relative Häufigkeit des Eintritts bestimmter auffallender Ereignisse'."

Im Zuge der stärker werdenden Ansprüche an Strenge im mathematischen Aufbau in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, gerät die LAPLACEsche Definition immer mehr ins Kreuzfeuer der Kritik. J. v. KRIES schlägt 1886 vor, das Prinzip des unzureichenden Grundes durch ein Prinzip des zwingenden Grundes zu ersetzen. Nach V. KRIES soll die "Aufstellung der gleichmöglichen Fälle eine in zwingender Weise und ohne jede Willkür sich ergebende sein."[24] Im gleichen Jahr gebraucht VENN wohl zum ersten Mal eine Formulierung der Wahrscheinlichkeit als frequentistischen Begriff[25]. Sieht man von diesen wenigen Neuansätzen ab, die nur noch historische Bedeutung haben, so wurde nach RENYI (1969, S. 83) "in Richtung der Grundlagen der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Grunde kein wesentlicher Fortschritt erreicht." HILBERT nahm 1900 das Problem, die Wahrscheinlichkeitsrechnung befriedigend zu axiomatisieren, als sechstes Problem in seine Liste der ungelösten mathematischen Probleme auf.

---

24) zit. nach KAMKE 1932, S. 12

25) vgl. KYBURG u. a. 1964, S. 4

HILBERT:

> "Was die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrifft, so scheint es mir wünschenswert, daß mit der logischen Untersuchung derselben zugleich eine strenge und befriedigende Entwicklung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speziell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe." (HILBERT 1965 -1900-, S .306)

Als erster bedeutender Schritt zur Lösung dieses Problems wird der Versuch von R. V. MISES angesehen, der 1919 die Wahrscheinlichkeit als mathematischen Grenzwert der relativen Häufigkeit für das Auftreten eines Beobachtungsmerkmals innerhalb eines Kollektivs definiert[26]. Diese Definition findet sehr schnell Anhänger. KAMKE (1932), REICHENBACH (1935) und andere bauen, teilweise unter Abwandlung der Voraussetzungen für ein Kollektiv die Theorie weiter aus. Da die V. MISESschen Forderungen eines Grenzwertaxioms und eines Regellosigkeitsaxioms zugleich an zufallsartige Ereignisfolgen ("Kollektive") zu Widersprüchen führt[27], versuchte u. a. K. POPPER (1971) eine Neubegründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Häufigkeitstheorie, jedoch ohne Grenzwertaxiom und nur mit einem abgeschwächten Regellosigkeitsaxiom.

Mathematisch gesehen hat der V. MISESsche Ansatz nach RENYIs Ansicht[28] nur noch historische Bedeutung. Er hat jedoch zu fruchtbaren Diskussionen geführt, einmal über die nach wie vor ungelöste Frage der Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, zum zweiten über die Natur von Wahrscheinlichkeitsaussagen und zum dritten[29] über die Zusammenhänge zwischen Theorie und der realen Aussenwelt.

Das erste Problem wird 1933 von KOLMOGOROFF mathematisch befriedigend gelöst, der die Wahrscheinlichkeit als undefinierten Begriff einführt und seinen Gebrauch durch einfache Axiome regelt, so wie es vorher schon in anderen mathematischen Gebieten wie der Geometrie geschehen war. Seither kann (und wird sie wohl auch von manchen Mathematikern)

---

26) vgl. V. MISES 1928, S. 16
27) vgl. WAISMANN 1930, S. 232
28) vgl. RENYI 1969, S. 83
29) die drei Punkte lassen sich nicht vollständig voneinander trennen.

die Wahrscheinlichkeitstheorie aufgefaßt werden als die Theorie der additiven, normierten Masse auf σ-algebren. Später wird das KOLMOGOROFFsche Axiomensystem in Richtung auf bedingte Wahrscheinlichkeitsfelder und nichtnormierte Maße verallgemeinert, womit die Entwicklung - im Rahmen der Axiomatik - einen vorläufigen Abschluß findet.
FÉRAUD (1971, S. 93) skizziert diese Entwicklung so:

> "Le calcul des probabilités ... devint une belle et puissante théorie 'particulièrement vigoureuse' qui pouvait être cultivée pour elle-même pour la joie de l'art pour l'art. Il n'y a pas à étonner en constatant que ce que l'on a gagné en rigueur, en pureté dans l'élaboration du calcul des probabilités a été perdu du côté de la liaison avec les applications."

Die Bedeutung des KOLMOGOROFFschen Axiomensystems für den Fortschritt in der Stochastik wird oft überschätzt. Wahrscheinlichkeitstheoretische Schemata wie MARKOFFsche Ketten und Grenzwertsätze für Summen unabhängiger Zufallsgrößen, die GNEDENKO (1968 , S. 372) als "grundlegend" und als "besonders wichtig" erachtet, waren schon um die Jahrhundertwende bekannt, einschließlich der Beweise diesbezüglicher wichtiger Sätze.[30] Weiter bedienen sich grundlegende Darstellungen der modernen Stochastik wie die von FELLER (1968) oder DOOB (1953) einer nicht primär maßtheoretisch orientierten Sprache. DINGES (1973, S. 25) schreibt sogar:

> "Wir kennen keinen Fachmann der Wahrscheinlichkeitstheorie und keinen der mathematischen Statistik, der sich eine messbare Abbildung vorstellt, wenn er von einer Zufallsgröße spricht. Erst wenn es gilt, einen mathematischen Beweis zu führen für eine Tatsache, die man bereits eingesehen zu haben glaubt, vollzieht man die Gedanken nochmals in der Sprache der Maßtheorie."

Allerdings muß man zugeben, daß das KOLMOGOROFFsche Axiomensystem einem Bedürfnis nach axiomatischer Strenge durchaus entgegenkam und deswegen bereitwillig von den Mathematikern akzeptiert wurde.
Ist es noch möglich, im Rahmen dieses kurzen geschichtlichen Überblicks die Entwicklung in der Axiomatisierung der Wahr-

---

30) etwa des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch LJAPUNOFF im Jahre 1901

scheinlichkeitsrechnung zu schildern, so ist es kaum möglich, die allgemeine Entwicklung der Stochastik seit Mitte des 19. Jahrhunderts kurz zu skizzieren. Dies dürfte einer noch zu schreibenden Geschichte der modernen Stochastik vorbehalten bleiben.

Ich möchte deswegen im folgenden nur noch auf einen mir besonders wichtig erscheinenden Aspekt eingehen: der Beziehung zwischen Theorie und Anwendung. Zwar sprach schon COURNOT 1849 von einer "Brücke zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wirklichkeitsbereich"[31] oder später ZILSEL 1916 vom "Anwendungsproblem". Die eigentliche, allgemeine Bewußtmachung, daß zwischen einer sauberen mathematischen Theorie und dem Feld der realen Problemsituationen Anwendungsvorschriften in Form einer Methodologie vorhanden sein müssen, soll die Theorie nicht absurde Ergebnisse liefern, gegen die sich der gesunde Menschenverstand sträubt, ist wohl den letzten Jahrzehnten vorbehalten geblieben. Beispielsweise versuche man im 19. Jahrhundert bis in den Anfang des 20. Jahrhunderts, vor allem unter dem Einfluß von LAPLACE und POISSON, die Wahrscheinlichkeitsrechnung - sogar in einer großen Zahl an Publikationen - für gerechte Richtersprüche nutzbar zu machen. Man "setzte voraus, daß Richter unabhängig voneinander urteilen und daß die Wahrscheinlichkeit, mit der sie zur richtigen Lösung eines Problemes kommen, konstant ist"[32] und schloß dann mathematisch weiter, daß ein Gericht mit einer großen Zahl von Richtern bei Mehrheitsbeschlüssen bei der Fällung eines Urteils praktisch keinen Fehler macht.

GNEDENKO (1968, S. 369f) schreibt hierzu:

> "Die Begeisterung für 'Anwendungen' dieser Art ohne genügende Berücksichtigung der sie determinierenden Seiten hat sich auf die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hemmend ausgewirkt. Alle diese grundfalschen Anwendungen sind später als ein 'mathematischer Skandal' eingeschätzt worden. Als Ergebnis dieser Mißerfolge machte die Begeisterung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung einer Enttäuschung Platz

---

31) zit. nach HENGST 1971, S. 71

32) GNEDENKO 1968, S. 369

> und unter den westeuropäischen Mathematikern war die Meinung weit verbreitet, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur eine Art mathematischer Unterhaltung sei, die keine wesentlichen wissenschaftlich begründeten Anwendungen zuläßt und nicht die Aufmerksamkeit ernsthafter Gelehrter verdient."

Wohl auf Grund solcher Entwicklungen wurde in der Folgezeit auch von anerkannten Mathematikern Stochastik und ihre Methodologie immer mehr als untrennbare Einheit angesehen. Vor allem R. A. FISCHER entwickelte in den zwanziger Jahren eine recht detaillierte statistische Methodik, die in den dreißiger Jahren von J. NEYMAN und E. S. PEARSON entscheidend bereichert wurde durch die beiden folgenden Grundgedanken, die immer noch Hauptbestandteile der modernen Statistik sind und die MENGES (1968, S. 13) folgendermaßen skizziert:

> "(a) Der Grundgedanke der Versuchsplanung besteht darin, daß der Statistiker nicht erst dann hinzutritt, wenn die fertigen Ergebnisse eines Experiments analysiert und zu Schlußfolgerungen benutzt werden, sondern bereits bei der Planung des Experiments. Und zwar wird die Experimentalanordnung vom ersten Anfang so geplant, daß bei gegebenen Kosten für die Durchführung des Experiments ein Maximum an Aufschlüssen zu erwarten ist.
> (b) Die Fehlertheorie von Neyman und Pearson berücksichtigt neben dem Risiko dafür, daß eine Hypothese statistisch bestätigt wird, obwohl sie falsch ist, auch das Risiko dafür, eine Hypothese zu verwerfen, obwohl sie richtig ist."

Sehr deutlich kommt der Sinneswandel im Gebrauch der Stochastik wie auch anderer mathematischer Disziplinen innerhalb der letzten 100 Jahre bei W. L. FISCHER (1971, S. 71) zum Ausdruck:

> "Das Ziel der Theorie ist es nicht mehr als deskriptives Modell der Wirklichkeit zu fungieren... sondern sie zielt auf ein 'deduktives Modell' ab, das nicht nur 'Erklärungen' liefern, sondern darüber hinaus auch als Werkzeug zur Ableitung von Aussagen über die Realität dienen soll."

Und HENGST (1971, S. 61) sieht in Anlehnung an LUDWIG (1970, S. 30) die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (MS) durch die Angabe von drei Teilen bestimmt: "einer mathematischen Theorie; in unserem Falle die Wahrscheinlichkeitstheorie WR, eines Wirklichkeitsbereiches W und einer Anwendungsvorschrift AV (kurz mit ⟶ bezeichnet), so daß MS gleich WR ⟶ W ist."

Fast parallel zu dieser Entwicklung des Theorieverständnisses der Stochastik entstanden im wesentlichen drei verschiedene mathematisch-philosophische Richtungen zum Thema, was "Wahrscheinlichkeiten" bedeuten sollen und wie Wahrscheinlichkeitsaussagen zu interpretieren sind: die subjektivistische, die objektivistische und die logizistische Richtung.

Nach der subjektivistischen Theorie[33], zu deren Hauptvertretern DE FINETTI gehört, stellt Wahrscheinlichkeit den Grad der Überzeugung, dar, den ein Individuum in das Eintreten eines Ereignisses abhängig von seinem Vorwissen hat. Sie ist subjektiv insofern, als sie von Person zu Person wechselt und nur gewissen Kohärenzbedingungen unterliegt.

Dagegen gehen die Objektivisten, manchmal auch "Frequentisten" genannt[34], zu denen NEYMAN[35], aber auch Philosophen wie POPPER [36] gezählt werden, von der Häufigkeitsdeutung der W aus und schreiben auf Grund der "Stabilität" der relativen Häufigkeit in einer Folge von Zufallsexperimenten wie etwa dem mehrfachen Münzenwurf dem Ereignis "Wappen" eine objektive Wahrscheinlichkeit zu, die nicht abhängt von der Erwartungshaltung des Individuums, sondern im Gegenteil als intrinsische Eigenschaft den betreffenden Versuchen zukommt.

Zwar unterschied schon POISSON "zwischen 'probabilité' als

---

33) vgl. MATALON 1967, S. 531ff und KYBURG (1964)
34) vgl. MATALON 1967, S. 530
35) vgl. NEYMAN 1967, 1966 und S. 47
36) POPPER 1971

einer im subjektiven und 'chance' als einer im objektiven Sinne aufgefaßten Wahrscheinlichkeit"[37] und ZILSEL (1916, S. 181) stellte 1916 die Frage:

> "Gibt es Wahrscheinlichkeit nur für uns Menschen oder darf man auch im Objektiven eine Wahrscheinlichkeit suchen?"

Aber erst in den letzten Jahrzehnten wurde diese Frage zum Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen und auch Kontroversen.

Eine dritte Interpretation der Wahrscheinlichkeit als einer "logischen Relation zwischen einem Satz und anderen Sätzen"[38] d. h. einem Maß, das Ausdruck für die logische Nähe von Propositionen ist, wurde 1921 von KEYNES begründet und vor allem durch CARNAP (1950) weitergeführt. CARNAP geht dabei von prädikatenlogischen Sprachen aus, für die sogenannte c-Funktionen definiert sind, die eine Reihe von Axiomen erfüllen sollen.[39] Dabei ergeben sich komplizierte formalistische Systeme, die bisher nur bei Zugrundelegung relativ einfacher und ausdrucksarmer Sprachen widerspruchsfrei sind, und die, sobald reicherhaltige Sprachen gewählt werden, die es auch gestatten, Wahrscheinlichkeitsaussagen über den Wert physikalischer Größen zu formulieren, Raum für Paradoxien wie etwa die GOODMANparadoxie lassen.[40] Aus diesem Grunde sehe ich davon ab, den logischen Wahrscheinlichkeitsbegriff im Hauptteil weiter zu behandeln.[41]

Dagegen sollen die subjektive Wahrscheinlichkeit und die objektive Wahrscheinlichkeit im folgenden etwas ausführlicher, als hier geschehen, Gegenstand meiner Betrachtungen sein.

---

37) nach VIETORIS 1951, S. 70

38) KYBURG 1964, S. 5

39) vgl. v. KUTSCHERA 1972, S. 124

40) ibid S. 137ff

41) etwas anderes ist es mit der Frage, ob im Unterricht aller Stufen Wahrscheinlichkeit über Mengen oder Propositionen betrachtet werden soll (vgl. FREUDENTHAL 1974)

2. Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nach dem historischen Rückblick im vorangehenden Abschnitt will ich im folgenden die begriffliche Struktur der Wahrscheinlichkeitsrechnung an Hand verschiedener Konzeptionen diskutieren. Es wird sich dabei zeigen, daß Kontroversen zwischen Spezialisten dieser Disziplin auch heute noch vorhanden sind, so daß für die späteren fachdidaktischen Überlegungen nicht von einem Konsensus der Fachwissenschaftler ausgegangen werden kann, sondern eine Entscheidung zu treffen sein wird.

Ziel unserer Überlegungen ist es, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, eine Liste "fundamentaler Ideen" zu entwickeln.

2.1. Zufallsexperiment und Ereignisraum

Nach BAUER (1964, S. 7) "verdankt die Wahrscheinlichkeitstheorie ihr Entstehen dem Wunsche, mathematische Modelle für das Studium eines vom Zufall gesteuerten Geschehens zu entwickeln...". Was heißt aber: "... vom Zufall gesteuertes Geschehen?" Kann etwas, was einer Steuerung unterliegt, noch zufällig sein? Es deutet sich hier schon die Notwendigkeit an, in der Stochastik eine behutsame und vorsichtige Sprache zu pflegen, damit keine Verwirrung entsteht.

Nach dem Vorbild der meisten Lehrbücher beginnen wir deswegen mit dem auf den ersten Blick unverfänglicher erscheinenden Begriff "Zufallsexperiment". Ein Zufallsexperiment liegt vor, wenn von einer Ausgangssituation aus verschiedene Folgesituationen denkbar sind. Das Standardbeispiel hierfür ist der einfache Wurf mit einem normalen Spielwürfel, bei dem es ungewiss ist, welche der Zahlen 1 bis 6 fällt. Hebt man im Gegensatz dazu einen Stein hoch und läßt ihn los, so wird er zu Boden fallen. Es ist praktisch nur eine einzige Folgesituation denkbar, und man wird solche Experimente als 'determi-

nistisch' im Gegensatz zu 'stochastisch' bezeichnen. Zwar ist auch der Ausgang eines derartigen Experimentes mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, aber von unserem physikalischen Erfahrungsschatz her, ist diese Unsicherheit so klein, daß man sich nicht scheut, die Bezeichnung 'deterministisch' anzuwenden. Es wird hier eine gewisse begriffliche Problematik insofern sichtbar, als sich nach RENYI (1966, S. 21) "... fast jedes deterministische Schema der Naturwissenschaft bei einer genaueren Untersuchung als stochastisch erweist." Im übrigen läßt sich das Experiment mit dem Stein auch als "stochastisch" deuten, wenn man sich nämlich die Aufprallfläche in Gebiete aufgeteilt vorstellt und fragt, wohin der Stein fällt. Die Frage also, ob ein Experiment zufällig oder deterministisch ist, hängt somit auch von anderen Dingen ab als dem äußerlich sichtbaren Experimentiervorgang.

Deswegen schlagen Lehrbücher bei der Klärung des Begriffes "Zufallsexperiment" einen ähnlichen Weg wie RICHTER (1966, S. 47) ein, der davon ausgeht, daß wir bei einem Zufallsexperiment"... eine bestimmte Situation S_o vor uns haben, die in Zukunft zu den denkbaren Folgesituationen S_v führen kann...". KREYSZIG (1968, S. 50) versteht unter einem Zufallsexperiment "einen beliebig oft wiederholbaren Vorgang, der nach einer ganz bestimmten Vorschrift ausgeführt wird und dessen Ergebnis vom Zufall abhängt, das soll heißen, nicht im voraus bestimmt werden kann."

Alle diese Begriffserklärungen (von manchen Autoren gar als "Defintionen" bezeichnet) sind problematisch. Einmal hat uns die Quantentheorie gelehrt, daß es fragwürdig ist, von einer "wohlbestimmten" Situation zu sprechen. Fragwürdig ist auch eine "ganz bestimmte Vorschrift" vorauszusetzen, denn im engeren Sinne des Wortes würde dies ja wieder deterministisch bedeuten. Fragwürdig ist auch von "beliebig wiederholbar" zu sprechen, denn es gibt im täglichen Leben sicher-

lich sehr viele Situationen, die zwar in ihrem Ausgang zufällig sind, aber schlechthin nicht wiederholbar sind.

Autoren wie RENYI (1966, S. 20) sind deswegen etwas vorsichtiger und gebrauchen in diesem Zusammenhang den Terminus "stochastisches Schema" und meinen damit Experimente, die nicht streng kausal, d. h. bei jeder Wiederholung notwendigerweise zum gleichen Ergebnis führen. Aber was heißt dann überhaupt "Experiment", und gibt es in der Realität eine strenge "Wiederholung"?

Man erkennt, daß es höchst schwierig ist, diesen so einfach erscheinenden Begriff "Zufallsexperiment" intentional zu erklären. KRICKEBERG (1963, S. 9) schreibt dazu:

> "... betrachten wir daher noch einige Beispiele, die uns zugleich zeigen sollen, wie man bei konkret gestellten einfachen Fragen dem Begriff 'zufälliges Experiment' und 'zufälliges Ereignis' am bequemsten und vernünftigsten einen konkreten Inhalt geben kann, aber auch, wie schwierig und oft unmöglich es ist, dies in präziser Weise zu tun."

KRICKEBERG wie auch andere Autoren klären den Begriff durch Angabe von prägnanten Beispielen. Überhaupt zeichnet sich in der modernen Fach- und Lehrliteratur der Trend ab, im vormathematischen Bereich, zu dem im Grunde ja auch der Begriff "Zufallsexperiment" gehört, gar nicht erst den Versuch zu machen zu 'definieren', sondern eher an intuitive Vorstellungsweisen zu appellieren und die verwendete Sprache zu disziplinieren. Diese Auffassung kommt vor allem bei DINGES[42] zum Vorschein, der in einer Stellungnahme zum Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung von vornherein eine <u>implizite</u> Beschreibung in der folgenden Form gibt:[43]

> "Das wichtigste Datum eines <u>Zufallsexperiments</u> ist das System (oder Feld) $\mathcal{A}$ der beobachtbaren Ereignisse."

und später auf Seite 11 schreibt:

> "Wir schlagen folgenden Sprachgebrauch vor: Ein <u>Zufallsexperiment</u> ($\mathcal{A}$, P) liegt fest, wenn ein System $\mathcal{A}$ von beobachtbaren Ereignissen (mit den Eigenschaften aus I (2) und (3) und eine Wahrscheinlichkeitsbewertung...festgelegt ist."

---

42) vgl. Vortrag über "relative Häufigkeiten", gehalten am 14.1.1975 in OBERWOLFACH (unveröff.)

43) DINGES 1973, S. 4

Das Prädikat "beobachtbar" ist nach DINGES aus folgendem Grund wichtig: es gibt beim Würfelspiel zum Beispiel die beobachtbaren Ereignisse, daß beim ersten Wurf eine gerade Zahl oder eine Zahl größer als drei auftaucht. Betrachtet man dagegen das Zufallsexperiment "Man würfle solange, bis die erste Sechs kommt", dann ist "das Ereignis, daß im zweiten Wurf eine Sechs kommt, nicht beobachtbar. Es könnte nämlich sein, daß der erste Wurf eine 6 ergibt und daher gar nicht zweimal gewürfelt wird."[44] Beobachtbare Ereignisse lassen sich auffassen als Teilmengen der Menge E der Ausfälle, die bei einem Zufallsexperiment denkbar sind. Beim einfachen Würfelwurf ist dies besonders einsichtig: Die Grundmenge E der Ausfälle ist $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Man hat z. B. die Zuordnungen:

beobachtbares Ereignis	zugeordnete Teilmenge
A: Würfeln einer geraden Zahl	$\{2, 4, 6\}$
B: Würfeln einer 7	$\emptyset$
C: Würfeln einer Zahl kleiner als 4	$\{1, 2, 3\}$
D: Würfeln einer geraden Zahl oder einer Zahl kleiner als 4	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$

Die Tatsache, daß sich beobachtbare Ereignisse durch die Konjunktion oder Disjunktion verknüpfen lassen, führt zu der intuitiv verständlichen Forderung, daß die Menge der beobachtbaren Ereignisse eine BOOLEsche Algebra ist, für die man aus mathematischen Gründen zusätzlich fordert, daß sie auch abgeschlossen ist bezüglich der unendlichen Vereinigung abzählbar vieler beobachtbarer Ereignisse. DINGES gibt ein Beispiel dafür, daß die letzte Forderung vielleicht zu einer "Vergewaltigung der Sprache führt". Betrachten wir etwa beim wiederholten Würfeln das Ereignis, daß nie eine 6 kommt, so ist dieses Ereignis darstellbar als unendliches Kreuzprodukt der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit sich selbst, ist also nach obiger Forderung ein beobachtbares Ereignis.

---

44) ibid. S. 4

2.2. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

2.2.1. LAPLACEsche Wahrscheinlichkeitsrechnung

Solange man sich im Bereich aufhält, einem Zufallsexperiment nur ein Ereignisfeld zuzuordnen, ist man der Hauptaufgabe, Begriffe des täglichen Lebens wie "wahrscheinlich", "gut möglich", "ziemlich sicher" etc., die ja schon einen quantitativen Charakter haben, zu präzisieren und umgekehrt Prognosen in der Außenwelt zu liefern, nicht näher gekommen. Am natürlichsten erscheint es hier zunächst, die unmittelbar einleuchtende Auffassung BERNOULLIS von Wahrscheinlichkeit als "dem Grad der Gewissheit, welcher sich zur Gewissheit wie der Teil zum Ganzen verhält" in eine mathematische Form zu übersetzen. Wenn man diese Aussage als Verhältnisgleichung deutet und die Mengensprache benützt, so entspricht "das Ganze" offenbar der Grundmenge E. Der "Grad der Gewissheit" für das Eintreten eines Ereignisses A (= Wahrscheinlichkeit für A =) entspricht dann dem "Anteil", den die A zugeordnete Teilmenge an E ausmacht. Das letztere läßt sich aber durch ein Mengenmaß, z. B. das Mächtigkeitsmaß oder ein Inhaltsmaß mathematisch als Verhältnis präzesieren. Man "definiert": die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl der günstigen Fälle durch Zahl der möglichen Fälle ("LAPLACE") bzw. im Falle kontinuierlicher Grundmengen E: $p = \tilde{\mu}(A) / \tilde{\mu}(E)$ wobei $\tilde{\mu}$ eine Maßfunktion wie Flächeninhalt, Länge etc. bedeutet.[45] Dabei unterstellt man von vornherein, daß die möglichen Fälle auch alle "gleichmöglich" sind. Durch diese 'Definition' wird das Feld der beobachtbaren Ereignisse quantifiziert in dem Sinne, daß man ihnen Wahrscheinlichkeiten in Form von Zahlen aufprägt.

Es ist sehr schnell bemerkt worden, daß der Terminus "gleichmöglich" nichts anderes bedeutet als "gleichwahrscheinlich", und somit ein "curculus vitiosus" vorliege.

---

45) vgl. POLYA 1963, S. 95

Dieser Vorwurf ist in der Tat berechtigt, solange es nicht gelingt, "gleichwahrscheinlich" unabhängig von obiger Definition festzulegen. Dies geschieht mit Hilfe des "Prinzips vom unzureichenden Grund" oder durch das "Prinzip des zwingenden Grundes", die beide schon seit CZUBERs Zeiten mehr und mehr aus den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung eliminiert wurden. Statt dessen hat sich der Begriff der Symmetrie eingebürgert. Danach ist ein Zufallsexperiment symmetrisch hinsichtlich seiner Ausfälle, wenn kein Ausfall in "relevanter" Weise gegenüber den anderen ausgezeichnet ist. Was relevant heißt, ergibt sich im Einzelfall aus den physikalisch-geometrischen Eigenschaften. Beispielsweise liegt bei einem fairen Würfel in allen Punkten, die das Werfen beeinflussen können (Seitenflächen, Gewichtsverteilung etc.) Symmetrie vor, während in irrelevanten Eigenschaften (wie Seitenaufdruck, Farbe etc.) Unterschiede gestattet sind. DÖRGE (1947, S. 30, 47) formuliert hierzu als 'Anwendungshypothese', daß physikalische Symmetrie statistische Symmetrie induziert.

In vielen Fällen läßt sich Symmetrie, die zunächst nicht gegeben ist, durch Verfeinerung des Stichprobenraumes erreichen. Liegt beispielsweise ein Spinner der folgenden Gestalt vor,[46] so erhält man durch Unterteilung "gleichmögliche" Ausfälle und kann die LAPLACEsche Regel anwenden.

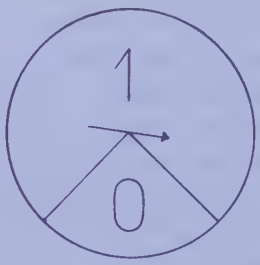


Fig. 1

Höchst problematisch wird die Nachprüfung von "gleichmöglich", unter Verwendung von Symmetrieüberlegungen, wenn die Ausfallmenge überabzählbar ist. Beispiele hierfür sind die 'BERTRANDschen Paradoxa', die v. MISES und anderen immer wieder als Argumente gegen die LAPLACEsche Wahrschein-

46) vgl. STREHL 1974, S. 33

lichkeitsrechnung vorgebracht wurden.[47] Das bekannteste und wohl auch schönste BERTRANDsche Paradoxon ist folgendes:[48] In einem Kreis wird auf "gut Glück" eine Sehne gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie größer ist als die Seitenlänge des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks? Als Lösungen, je nachdem, wie man "auf gut Glück" auffasst, erhält man verschiedene Ergebnisse.

Lösung A: Es genügt scheinbar aus Symmetriegründen, nur die Sehnen einer bestimmten Richtung zu betrachten. Aus Fig. 2 ergibt sich sofort, daß nur die Sehnen länger sind als die Seite a des einbeschriebenen Dreiecks, die innerhalb eines Streifens der Länge r um den Mittelpunkt liegen. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, die gesucht wird, gleich 1/2.

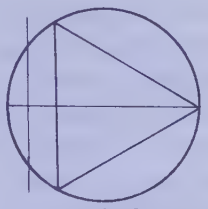


Fig. 2

Lösung B: Ebenso kann man scheinbar aus Symmetriegründen, auch die Sehnen von einem Punkt der Peripherie aus betrachten. Nur die Sehnen sind größer als a, die innerhalb des Dreiecks liegen. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich $p = 60/180 = 2/3$.

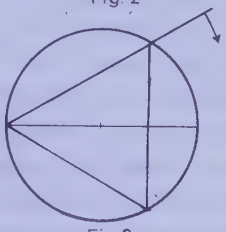


Fig. 3

Lösung C: Man betrachtet den Mittelpunkt der Sehne. Je nachdem, ob dieser Mittelpunkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises um den Kreismittelpunkt mit Radius r/2 liegt, ist die Sehne kürzer oder länger als a. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 1/4.

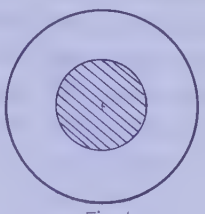


Fig. 4

Das Paradoxon löst sich auf, wenn man bedenkt, daß allen drei Lösungen verschiedene experimentelle Versuchsbedingungen

---

47) vgl. V. MISES 1928, S. 72, 75, KAMKE 1932, S. 13, REICHENBACH 1935, S. 341

48) vgl. GNEDENKO 1968, S. 30, STREHL, 1974, S. 34

zugrundeliegen, die alle realisiert werden können.[49] Somit ist der Begriff der "statistischen Symmetrie" nicht unabhängig von der zugrundeliegenden experimentellen Gegebenheit. Während MESCHKOWSKI (1968, S. 30) das BERTRANDsche Paradoxon dazu benützt, um von einem Zirkel in der Begriffsbildung zu sprechen, wenn man in der LAPLACEschen Definition die Wahrscheinlichkeit definiert und dabei voraussetzt, daß gewisse Ereignisse gleich wahrscheinlich sein sollen, wird von den meisten Autoren der Standpunkt eingenommen, daß die "LAPLACEsche Definition" eine Methode zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in endlichen Wahrscheinlichkeitsalgebren ist, deren elementare Ereignisse aus bestimmten objektiven Gründen (z. B. Symmetrieeigenschaften) die gleichen Wahrscheinlichkeiten besitzen und demzufolge die BERTRANDschen Paradoxa nur ein Beleg dafür sind, daß in bestimmten Fällen solche Symmetrieüberlegungen versagen.[50] Ein Zirkel in der Begriffsbildung wird jedenfalls zurückgewiesen.[51] Offenbar zu Recht, denn der quantitative Begriff der Wahrscheinlichkeit wird auf den einfacheren Relationsbegriff "ist gleichwahrscheinlich" zurückgeführt, der allerdings im mathematischen Sinne undefiniert bleibt und nur durch Schlüsse außerhalb jedes mathematischen Systems in der realen Außenwelt festgelgt wird. Besonders deutlich wird dies, wenn OBERSCHELP (1957, S. 44) für "Begründungszwecke" die LAPLACEsche Definition ohne den Zusatz "gleichmöglich" formuliert. Die Definition ist dann rein innermathematisch und einwandfrei. Es folgen sofort die Theoreme:

Th 1 $0 \leqslant p \leqslant 1$

Th 2 $p(E) = 1$

Th 3 $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, für $A \cap B = \emptyset$

Durch diesen Trick wird die gesamte Problematik in die "Anwendbarkeit" der Definition hineingelegt. Die Definition entspricht dann nur in bestimmten Fällen dem vorwissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriff des Alltages. Dies bedeutet

---

49) vgl. GNEDENKO 1968, S. 31
50) vgl. RENYI 1966, S. 30; 1969, S. 29, 32, 82; STREHL 1974, S. 34
51) FINSLER 1947, S. 109; VIETORIS 1948, S. 70-71

in der Terminologie von CARNAP/STEGMÜLLER (1959, S. 15), daß die "Ähnlichkeit zwischen dem Explikandum und dem Explikat" nicht mehr unbedingt gegeben ist.

Um zu einem abschließenden Urteil über die 'klassische Definition' der Wahrscheinlichkeit zu kommen, sind folgende Punkte festzuhalten:

1) ein 'circulus vitiosus' liegt nicht vor!
2) wegen des Rückgriffs auf Kriterien wie das des unzureichenden Grundes oder Symmetrieüberlegungen handelt es sich nicht mehr um eine rein mathematische Definition
3) in bestimmten Fällen versagen die für die Anwendungen nötigen Symmetrieüberlegungen.

Es ist daher nicht korrekt, im Zusammenhang mit der LAPLACEschen Wahrscheinlichkeit von "Definition" zu sprechen. Geeignet erscheint der Standpunkt von DE FINETTI (1938, S. 112):

> "A powerful and convenient criterion is thus obtained: not only because it gives us a way of calculating the probability easily, when a subdivision into cases that are judged equally probable is found, but also because it furnishes a general method for evaluating by comparison any probability whatever, by basing the quantitative evaluation on purely qualitative judgements (equality or inequality of two probabilities)."

2.2.2. Die Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeit wurde erstmals durch von MISES 1919 zum Aufbau einer eigenständigen Wahrscheinlichkeitstheorie verwandt. Von MISES geht dabei vom Begriff des Kollektivs aus:[52]

> "Ein Kollektiv ist eine Massenerscheinung oder ein Wiederholungsvorgang, kurz eine lange Folge von Einzelbeobachtungen, bei der die Vermutung berechtigt erscheint, daß die relative Häufigkeit des Auftretens jedes einzelnen Beobachtungsmerkmals einem bestimmten Grenzwert zustrebt. Diesen Grenzwert nennen wir die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Merkmals innerhalb des Kollektivs."

Dabei wird für das Kollektiv vorausgesetzt, daß es regellos aufgebaut ist. Beide Axiome, das Grenzwertaxiom und das Regellosigkeitsaxiom werden von MISES unter anderem mit den Erfahrungen der Spielbanken von MONTE CARLO begründet, bei denen 'auf lange Sicht' die Banken einen bestimmten Gewinn erzielen, andererseits aber noch nie ein Spieler ein effektives System erfolgreich anwenden konnte. (Satz vom ausgeschlossenen Spielsystem.)

VON MISES führt gute Gründe an für seinen Neuansatz. Einmal ist es bei vielen Zufallsexperimenten wegen der gegebenen Unsymmetrie (z. B. bei einem falschen Würfel) gar nicht möglich, a-priori-Wahrscheinlichkeiten nach der LAPLACEschen Methode festzusetzen, zum anderen ist es gerade in der Physik oft nötig, statistische Aussagen über Vorgänge zu machen, wo die Annahme gleichwahrscheinlicher Ausfälle gar nicht sinnvoll ist. KAMKE als Anhänger der Häufigkeitsdefinition sagt sogar ganz explizit, daß die auf der LAPLACEschen Definition beruhende Wahrscheinlichkeitstheorie für die praktischen Anwendungen ungeeignet sei.[53] DÖRGE (1932), REICHENBACH (1935) und POPPER (1971) vertreten ähnliche Standpunkte. Auch viele neuere Bücher über Wahrscheinlichkeitsrechnung - vor allem für den Schulgebrauch - bauen mehr oder weniger versteckt auf der Grenzwertdefinition der Wahrscheinlichkeit auf. Einen eigenartigen Standpunkt nimmt STENDER

---

52) VON MISES 1928, S. 16
53) KAMKE 1932, S. 13, 109f
54) z.B. BANGEN 1967, S. 14, 16, 17; WELLNITZ 1940, 1969; DREETZ 1960 S. 30; MESCHKOWSKI 1968, S. 34; ENGEL 1973, S. 12

(1955, S. 275) ein, wenn er schreibt, daß "... mit dem Limesbegriff im Sinne von V. MISES an dieser Stelle nicht operiert werden sollte..." einen Satz später aber schreibt:

> "Der nach Punkt 4 bei einem Zufallsexperiment zu einem Ausfall x_i gehörende feste Wert heißt... die Wahrscheinlichkeit von x_i." 55)

Neben den Anhängern der V. MISESschen Defintion gab es seither eine Reihe von Gegnern. Schon 1930 wies WAISMANN (1930, S. 252) darauf hin, daß es unzulässig sei, den mathematischen Grenzwertbegriff auf eine Folge anzuwenden, die per definitionem gar kein Bildungsgesetz hat. Da hilft es auch nicht viel, wenn REICHENBACH (1935, S. 83, 350ff) meint, daß es mehr ein "praktischer Limesbegriff" sei. Denn in allen Abhandlungen der "Frequentisten" taucht mehr oder weniger versteckt die Gleichung $p = \lim h_n$ auf. Nun bedeutet diese Gleichung aber doch mathematisch:

> Zu jeder positiven Zahl ε gibt es eine natürliche Zahl N, so daß für $n>N$ gilt $|p(E) - h_n| < \varepsilon$

Das aber ist unhaltbar!

V. D. WAERDEN (1951, S. 66) schreibt dazu:

> "Die Limesdefinition steht also im Widerspruch zu den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung selber."

Wenn man den Limes nicht wie obenstehend auffaßt, sondern mit SCHRAGE (1973, S. 8) wahrscheinlichkeitsmäßig etwa in der Form:

> "Für jedes $\varepsilon>0$ und für jede beliebig nahe bei 1 liegende Wahrscheinlichkeit p existiere ein N, so daß mit Wahrscheinlichkeit p gilt $\bigwedge_{n>N} |a_n - a| < \varepsilon$"

so ist nicht viel gewonnen. SCHRAGE:

> "Hier beißt sich die Katze in den Schwanz. Wahrscheinlichkeit ist nur noch mit Wahrscheinlichkeit definiert."

VOGEL (1963, S. 189) schreibt:

> "Wir möchten hier ausdrücklich betonen, daß die Beziehung zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit vollkommen ungeeignet für eine Definition des Begriffes Wahrscheinlichkeit ist." 57)

---

55) mit Punkt 4 meint STENDER: 4. Für jeden vorkommenden Wert von x muß $H_n(x)$ für große n sich einem festen Wert annähern."

56) daß v.MISES den Grenzwertbegriff so versteht, ergibt sich aus seiner Abhandlung von 1928, S. 183

57) ähnliche Ansichten vertreten VIETORIS 1948, S. 70-71, FINSLER 1947, S. 111; GNEDENKO 1968, S. 40; JUHOS 1970, S. 110; SCHNORR 1971, S. 15; V. KUTSCHERA 1972, S. 88f; DINGES 1973, S. 9ff

und DINGES (1973, S. 9) präzisiert diesen Standpunkt:

> "Zum einen sind Grenzwerte relativer Häufigkeiten reale Daten, keine von einem Modell abgeleiteten."

D. h., da sie der äußeren Wirklichkeit entstammen, können sie nicht zu einer innermathematischen Begründung benutzt werden. Zum anderen sagt DINGES weiter, worauf schon NOLFI (1956, S. 39f) hinwies:[58]

> "... könnten vom frequentistischen Standpunkt die Gesetze der großen Zahlen als Tautologien erscheinen. Die Tatsache, daß sie großartige Leistungen der Mathematik sind, sollte nicht durch den weiteren Vorzug verdunkelt werden, daß sie zeigen, daß durch Einfachheit ausgezeichnete mathematische Systeme mit realen Phänomenen korrespondieren."

Halten wir zusammenfassend fest:

Die V. MISESsche Definition der Wahrscheinlichkeit ist als mathematische Definition nicht haltbar, da sie mathematische (limes) und außermathematische (Unabhängigkeit von Versuchen, relative Häufigkeiten) Fakten miteinander verknüpft und zudem widersprüchlich ist.

---

58) eine ähnliche Meinung vertritt SCHRAGE 1973, S. 8-9

2.2.3. Der axiomatische Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der klassische und der von MISESsche Ansatz sind die einzigen nennenswerten Definitionsversuche für die mathematische Wahrscheinlichkeit. Beide kann man als unzureichend im mathematischen Sinne betrachten. VAN DER WAERDEN (1951, S. 67) drückt sich etwas schärfer aus:

> "Alle Versuche, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu definieren, sind bis jetzt gescheitert."

und fährt fort:

> "Da liegt es auf der Hand zu versuchen, ohne Definition auszukommen."

Den dafür möglichen Weg haben u. a.FREGE und HILBERT in der Geometrie vorexerziert. Nachdem alle Versuche die Begriffe "Punkt" und "Gerade" zu definieren, fehlgeschlagen waren. wurden beide einfach als undefinierte Begriffe einer geometrischen Axiomatik zugrundegelegt, die nur die Beziehungen zwischen ihnen festlegt.

Nun gehört es zu einer Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung sicher, daß sie die durchaus bewährte klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung nach LAPLACE, aber darüber hinaus auch Fälle erfaßt, in denen die LAPLACEsche Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht adäquat ist. Genau dies leistet das Axiomensystem von KOLMOGOROFF, das ausgeht von einem σ - Körper[59] über eine Menge E, der E als Element enthält und auf dem eine reellwertige Funktion p erklärt ist, mit den Eigenschaften:

A_1 $\quad 0 \leq p \leq 1$

A_2 $\quad p(E) = 1$

A_3 $\quad p(\bigcup_i A_i) = \sum_i p(A_i)$ für höchstens abzählbar viele, paarweise disjunkte A_i

Durch das Tripel $(E, \mathcal{A}, p)$ ist der axiomatische Rahmen festgelegt und wie H. RICHTER (1966) meint, ist es "vom Standpunkt der reinen Mathematik aus am elegantesten, die Wahrscheinlichkeit als normiertes Maß aufzufassen." Für eine rein mathematische Fundierung ist dieses Vorgehen sogar recht ökonomisch, ist doch keine Sprache so kurz und prägnant wie ein mathematischer Formalismus. Es wird dabei bewußt darauf verzichtet, die Interpretationsschwierigkeiten zu diskutieren,

---

59) vgl. S. 22

die sich bei der Anwendung auf praktische Probleme ergeben.

Beispielsweise erscheint es zwar naheliegend, dem einfachen Münzenwurf den Ereignisraum $\{W, Z\}$ und die Wahrscheinlichkeitsfunktion:

a) $p\{(W)\} = p\{(Z)\} = 1/2$ zuzuordnen. Indessen sind auch die beiden folgenden Zuordnungen von Wahrscheinlichkeiten ins Auge zu fassen:[60]

b) $p\{(W)\} = 1/3 \quad p\{(Z)\} = 2/3$

c) $p\{(W)\} = 1 \quad p\{(Z)\} = 0$

Bei allen drei Zuordnungen ist nämlich die Wahrscheinlichkeitsfunktion p festgelegt, die alle Axiome erfüllt. Die Frage, welche der drei nun die "richtige" sei, ist keine mathematische. Vielmehr hat man, wenn man mit dem KOLMOGOROFFschen Modell arbeiten will, zunächst einmal Anfangswahrscheinlichkeiten festzusetzen, die aber nicht auf mathematischen Weg zu gewinnen sind. Es ist merkwürdig, daß viele - sogar bekannte Autoren wie GNEDENKO (1968, S. 42) oder PAWLOWSKI (1971, S. 25) - bei der Einführung ins KOLMOGOROFFsche Axiomensystem von "Definition der Wahrscheinlichkeit" sprechen. Ganz krass kommt diese Auffassung bei FRANZ (1967, S. 68) zum Ausdruck:

> "Die modernste Defintion ist die axiomatische, die auf Kolmogoroff zurückgeht...Diese axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit schließt als Spezialfälle die klassische und die statistische ein, ist aber leistungsfähiger und umfassender als diese."

Dies ist nicht korrekt! Zum einen wird durch das KOLMOGOROFFsche Axiomensystem nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern der Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes definiert, in dem "Wahrscheinlichkeit" selbst undefinierbar bleibt. Zum anderen, selbst wenn man noch zugesteht, daß es sich um eine implizite Wahrscheinlichkeitsdefinition handelt, so kann sie doch im Grunde bei konkreten Fällen überhaupt nichts "leisten", wenn man nicht nach der LAPLACEschen Methode oder aber für den Fall, daß man eine Fälschung vermutet, durch Auszählen

---

60) vgl. GOLDBERG 1964, S. 58

einer "langen" Wurfserie eine Wahrscheinlichkeitsbewertung nach a), b) oder c) oder irgendeine andere vorher festsetzt.

Es zeigt sich hier ein Kennzeichen der angewandten Mathematik und der Naturwissenschaften überhaupt: zur Beschreibung einer realen Situation stehen gewisse Modelle zur Auswahl. Man entscheidet sich nach inutitiv - heuristischen Gesichtspunkten unter Einbeziehung von Vorerfahrungen für das eine oder andere Modell, arbeitet innerhalb des Modells weiter und kann erst im Nachhinein aus dem Vergleich der aus dem Modell ableitbaren Prognosen und den Ergebnissen Rückschlüsse ziehen auf die (vorläufige!) Adäquatheit des gewählten Modells. Von den Wahrscheinlichkeitstheoretikern, die über reine Maßtheorie hinausgehen, wird diese Problematik zwar gesehen, aber nicht immer so klar thematisiert wie von KRICKEBERG (1963, S. 194):

> "Zur Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie gehört neben der eigentlichen mathematischen Fundierung eine halb außermathematische, sobald wir uns entschließen, den engen Raum der rein mathematischen Theorie zu verlassen. Wir werden uns fragen, welchen ausser-mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff das gewählte Axiomensystem widerspiegelt und wie weit es das tut, ferner ob dies in gewissem Umfang zwangsläufig geschieht, wenn wir von Forderungen absehen, die wir aus praktischen Gründen nicht missen wollen...die mathematische Behandlung eines jeden konkreten Problems der Wahrscheinlichkeit erfordert im Prinzip jedenfalls die Konstruktion eines passenden Stichprobenraumes und eines geeigneten Ringes von Ereignissen."

Es ist nicht immer von vornherein klar, was "passend" ist, und die BERTRANDschen Paradoxa[61], wie auch das BERTRANDsche Kästchenproblem[62] zeigen allzudeutlich, in welche Schwierigkeiten man gerät, wenn man die Strukturtheorie verläßt und sich den Anwendungen zuwendet.

Die Einfachheit und Eleganz des KOLMOGOROFFschen Axiomensystems verführen geradezu dazu, die Wahrscheinlichkeitsrechnung in die Strukturmathematik einzuordnen. Hierzu äußert sich DINGES wie folgt:[63]

---

61) vgl. S. 22
62) vw. CZUBER 1914, S. 30
63) "Vortrag über relative Häufigkeiten" gehalten am 14.1.1975 in Oberwolfach (unveröff.)

> "Die axiomatisch-deduktive Strukturierung eines Wissensgebietes entspricht (auf jedem Niveau) den Anforderungen von Lehr- und Prüfbarkeit am unmittelbarsten. Ganz besonders im Falle der Wahrscheinlichkeitsrechnung verschenkt man aber den Bildungswert, wenn man der Versuchung einer derartigen Strukturierung nicht widersteht."

FREUDENTHAL (1974, S. 261f) gar geht soweit, die These aufzustellen, daß die übliche Axiomatik der Wahrscheinlichkeit (womit er die von KOLMOGOROFF meint) - wenn überhaupt wenig über Wahrscheinlichkeit aussagt, kaum von explizitem Nutzen sei, und daß sie eher für die Grundlagenforschung als für die Stochastiker von Bedeutung ist, weiterhin, daß das erste Kapitel in Lehrbüchern, das diese Axiomatik behandelt, nur ein "Feigenblatt" für den Verfasser ist und später nicht mehr gebraucht werde. Grundlegende Werke wie etwa von DOOB (1953) und FELLER (1968) aber auch elementare Lehrbücher wie das von ENGEL (1973) zeigen, daß es auch ohne "Feigenblatt" geht. Gerade ENGELs Buch scheint die alte LAPLACEsche Auffassung von Wahrscheinlichkeitsrechnung:[64]

> "...la théorie des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul: elle fait apprécier avec exactitude, ce que les exprits justes sentent par une sort d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte."

stark zugrunde zu legen. Einen anderen Standpunkt vertritt JEGER (1966, S. 21), wenn er die Struktur des BOOLEschen Verbandes und die Maßstruktur als "natürliche Zugänge zu einer modernen Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sieht."

Halten wir abschließend zum KOLMOGOROFFschen Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes einige Punkte zusammenfassend fest:

1. Die Aussagen der Fachwelt legen es nicht nahe, auf einen axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinzuarbeiten.
2. Gerade Stochastiker scheinen eher auf dem THOMschen[65]

---

64) zit. nach SAXER 1957, S. 62

65) THOM 1972, S. 202

Standpunkt zu stehen[65], daß das eigentliche Problem, dem sich der Mathematikunterricht stellen muß, nicht das der Strenge ist, sondern das der Sinngebung durch das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten im Sinne von FELLER: [66]

> "We shall no more attempt to explain the 'true meaning' of probability... instead we shall prove theorems and show how they are applied."

3. Gerade für die Anwendungen leistet der KOLMOGOROFFsche Ansatz aber wenig. Er befriedigt fürs erste das Bedürfnis der Mathematiker nach Strenge, verschiebt aber die Schwierigkeiten hauptsächlich auf das Feld der Anwendungen.

Zwei Aussagen von FREUDENTHAL (1973/74, S. 531, 533) sind hierzu bezeichnend:

> "Das schönste deduktive System der Wahrscheinlichkeitsrechnung garantiert nicht, daß man die Theorie anwenden kann."

> "Die Sorgen entstehen eben erst dann, wenn man die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden will..."

---

66) FELLER 1968, S. 3 (Unterstreichung von mir)

2.2.4. Das Problem der Anwendung[67]

Das "Problem der Anwendung", wie V. D. WAERDEN (1951, S. 68) sagt, ist schon sehr früh als äußerst wichtig, aber auch als höchst prekär erkannt worden. REICHENBACH (1935, S. 323 - 361) widmet ihm ein ganzes Kapitel und ZILSEL schrieb 1916 sogar ein Buch darüber, betitelt als "Das Anwendungsproblem". Durch das KOLMOGOROFFsche Axiomensystem ist das Problem, wie die Wahrscheinlichkeitstheorie anzuwenden ist, eher noch akuter geworden.

D. V. DANTZIG hat das Anwendungsproblem ausführlich analysiert und in ein Einschaltungs- und Ausschaltungsproblem zerlegt, die V. D. WAERDEN (1951, S. 67f) folgendermaßen beschreibt:

> "...besteht die Einschaltung des Wahrscheinlichkeitsformalismus darin, daß man die Ereignisse, die man untersuchen will, abgrenzt (oder genauer gesagt: ein vereinfachtes Bild von diesen Ereignissen entwirft) und gewisse Annahmen über ihre Wahrscheinlichkeiten macht."

Bestimmte Wahrscheinlichkeiten werden etwa auf Grund von Vorerfahrungen oder Benützung der LAPLACEschen Regel festgesetzt, wenn es die Eigenart des Problems als zulässig erscheinen läßt. Andere Wahrscheinlichkeiten wird man u. U. unbestimmt lassen. Man wird außerdem gewissen heuristische Prinzipien mit ins Spiel bringen, wie etwa das Prinzip, daß Ereignisse als statistisch unabhängig gelten sollen, wenn kein physikalischer Kausalzusammenhang sichtbar ist.

> "Nachdem auf Grund solcher Annahmen der Formalismus eingeschaltet ist, kann man die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden und die eigentlich interessierenden Wahrscheinlichkeiten ausrechnen...
>
> Der letzte Schritt ist die 'Ausschaltung des Formalismus. Auf Grund der errechneten Wahrscheinlichkeiten muß man sich entschließen, irgendetwas zu tun oder als wahr anzunehmen."

Das Prinzip, das hier eine entscheidende Rolle spielt, ist das sogeannte COURNOTsche Prinzip, das man als Verhaltensregel ansehen kann und das von RICHTER (1954, S. 64) so

---

67) vgl. auch S. 74f, 82ff

formuliert wird:

> "Wenn für ein E/H die Wahrscheinlichkeit p (E/H) sehr nahe bei 1 liegt, $p(E/H) < 1 - \varepsilon$, so wollen wir so tun als ob E, dagegen nicht sein Komplement eintreten wird... Das Cournotsche Prinzip gibt keine Anweisung um die p (E/H) aus Experimenten zu bestimmen, sondern es gibt ausgehend von der gerade vorhandenen Kenntnis über p (E/H) eine Anweisung, unser praktisches Handeln danach auszurichten."

Je nach Einzelfall, d. h. je nach der Tragweite der Konsequenzen, die sich aus einer falschen Entscheidung ergeben können, wird man für ε die Zahlenwerte 1%, 1 Promille oder noch kleinere Werte zulassen. In der Wahl von ε steckt somit eine relativ große Willkür, die subjektiv gefärbt ist durch die Person dessen, der entscheiden soll.

2.2.5. Philosophische Probleme beim Studium und bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Konzeption von V. D. WAERDEN, wie sie im letzten Abschnitt geschildert wurde, ist auf den ersten Blick bestechend klar in ihrer Gliederung. Da Wahrscheinlichkeit explizit mathematisch nicht zu definieren ist, trennt V. D. WAERDEN einfach in 'hier ist die Mathematik und hier ist die Philosophie der Anwendung'. Trotzdem scheinen mir entscheidende Lücken in diesem Aufbau zu stecken. U. a. wird nämlich darin keine Antwirt gegeben auf die Frage, wie man nun eigentlich zu "gewissen Annahmen" über Anfangswahrscheinlichkeiten kommt. Ausführlicher hat STEGMÜLLER (1969, S. 624f) die philosophischen Probleme, die beim Studium und bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftreten, klassifiziert:

"1) was meinen wir, wenn wir in einer gegebenen Situation sagen, daß eine Wahrscheinlichkeit von bestimmter Größe ... vorliege?

2) Wie gelangt man zu geeigneten Wahrscheinlichkeitsaussagen?

3) Wie überprüft man vorgegebene Wahrscheinlichkeitsaussagen auf ihren Wahrheitsgehalt?

4) Wie können wir aus gewußten oder angenommenen Wahrscheinlichkeitswerten neue Wahrscheinlichkeiten ableiten oder berechnen?

5) Wie lassen sich statistische Hypothesen für Erklärungen, Voraussagen oder andere Arten von wissenschaftlichen Systematisierungen verwenden?"

Punkt 4) ist im wesentlichen als die axiomatische Wahrscheinlichkeitsrechnung anzusehen. Zu 1), 2), 3) steht in der V. D. WAERDENschen Konzeption nicht sehr viel, obgleich dies eigentlich unabdingbar wäre. Gerade weil von der Wahrscheinlichkeitsrechnung so viele Entscheidungen bei der Anwendung abhängen, muß der Anwender schon eine ganz bestimmte Vorstellung von Wahrscheinlichkeit besitzen. Diesen Standpunkt teilt NOLFI (1956, S. 53):

"Es ist also Van der Waerden zuzustimmen, daß eine Existentialdefinition der Wahrscheinlichkeit nicht gefunden werden kann. Dagegen sind Definitionen der Wahrscheinlichkeit im Sinne von Anweisungen, Umschreibungen oder Beschreibungen u. E. unentbehrlich. Sie haben alle mehr die Bedeutung von 'Nominaldefinitionen'. Es wird ausgesagt, was jeweils unter den gegebenen Umständen nach menschlichem Ermessen unter Wahrscheinlichkeit am besten verstanden werden kann."

Mehr aus der Sicht der Fachwissenschaft hat sich H. RICHTER (1956, S. 46) mit dem von NOLFI angeschnittenen Problem beschäftigt:

"Wir gehen aus von stochastischen Situationen S, aus denen gewisse Folgesituationen S_V als denkbar erscheinen... Das Gefühl, das uns die S_V mit verschiedener Sicherheit erwarten läßt, bezeichnen wir mit Erwartungsgefühl, die Wahrscheinlichkeiten dafür mögen genauer intuitive Wahrscheinlichkeiten heißen."

Diese intuitiven Wahrscheinlichkeiten[68] erscheinen abgestuft zwischen praktischer Unmöglichkeit und praktischer Gewissheit und besitzen ein Korrelat in der objektiven Außenwelt, nämlich:

"Genauer gesagt stellen wir das folgende indeterministische Postulat auf: bei messbar vorgegebener Ausgangssituation S_O mit den messbar verifizierbaren Folgesituationen S_V ist jedem S_V eine reelle Zahl, objektive Wahrscheinlichkeit genannt, zugeordnet, die angibt, mit welcher Sicherheit wir S_V erhalten werden. Diese Wahrscheinlichkeit genügt Rechenregeln, die uns erlauben, aus Beobachtungsergebnissen auf ihre Größe zu schließen..."
Die Wahrscheinlichkeit wird von uns aufgefaßt als eine messbare physikalische Größe wie andere auch. Sie hat in jedem konkreten Falle einen bestimmten objektiven Wert, den wir zwar nicht kennen, auf den wir aber aus den Experimenten schließen sollen." 69)

RICHTER faßt zusammen und schlägt gleichzeitig eine Brücke zwischen "intuitiven" und "objektiven" Wahrscheinlichkeiten:[70]

"...Wenn wir die Wahrscheinlichkeit als zahlenmäßig präzisierte Größe einführen, die einem intuitiven Begriff entspricht, so ist dies durchaus nichts Ungewöhnliches. So ist der Temperaturbegriff in ähnlicher Weise aus dem intuitiven Erlebnis des 'wärmer - kälter' entstanden; Begriffe wie Maße, Kraft, Arbeit verraten

---

68) Sie bezeichnen im wesentlichen den gleichen Sachverhalt wie die subjektiven Wahrscheinlichkeiten bei COHEN u. a. 1961, S. 71 oder DE FINETTI 1937

69) RICHTER, 1956, S. 49. Diese Ansicht wird so nicht von allen Fachwissenschaftlern geteilt. DINGES 1973, S. 10, schreibt etwa: "...in der Stochastik gibt es aber statt der Messverfahren nur Schätzverfahren (verschiedener Qualität), statt der experimenta crucis nur Tests...")

70) RICHTER 1966, S. 50

> Ihre intuitive Grundlage. Stets beginner wir mit dem Postulat, daß es möglich ist, den intuitiven Begriffen eindeutig festgelegte messbare Größen entsprechen zu lassen. Die Beziehungen zwischen diesen Größen werden in Axiomen ausgesprochen. Erst dann ist es möglich, auf Grund der aus den Axiomen fließenden Lehrsätze anzugeben, wie die Messung der fraglichen Größen tatsächlich erfolgen kann. Genauso ist es auch mit der Wahrscheinlichkeit: erst dann, wenn wir bereits die Rechenregeln besitzen, denen die Wahrscheinlichkeit genügt, können wir uns überlegen, wie nun im einzelnen Falle der zahlenmäßige Wert der Wahrscheinlichkeit festgestellt werden kann."

Diese Regenregeln ergeben sich einmal daraus, daß man die deterministische Unmöglichkeit und die deterministische Gewissheit als Grenzfälle auffaßt und damit zu der Normierung $0 \leq p \leq 1$ kommt. Zum anderen läßt man sich vom Verhalten der relativen Häufigkeiten leiten, für die gilt:
$h_n (A+B) = h_n (A) + h_n (B)$ (für unvereinbare Ereignisse A und B), woraus sich unmittelbar das Additionsaxiom ergibt.

Was man unter Wahrscheinlichkeit nun wirklich zu verstehen hat, bleibt im wesentlichen unbeantwortet. RICHTER (1966, S. 51):

> "...Dagegen verstehen wir bis auf weiteres unter Wahrscheinlichkeit stets die naturwissenschaftliche Größe, an deren Existenz als letzten Grund für das Vorhandensein unseres Erwartungsgefühls wir schlicht realistisch glauben wollen."

In dieser Aussage drückt sich "so etwas wie ein Heimweh nach dem PLATONschen Ideenhimmel"[71] aus. Wahrscheinlichkeit wird als Idee verstanden, die zwar existent, aber nie ganz fassbar ist und sichtbare Abbilder besitzt - im Individuum als subjektive Erwartungsgefühle - in der Realität als sichtbar auftretende relative Häufigkeiten. Noch prägnanter kommt dieser Dualismus zum Vorschein, wenn RICHTER fragt:[72]

> "Meint die Wahrscheinlichkeit eine objektive Beschaffenheit der Natur, oder ist sie eine subjektive Bewertung unserer Aussagen?"

Ganz klar für das erstere haben sich die OBJEKTIVISTEN bzw. FREQUENTISTEN ausgesprochen, während die Subjektivisten für

---

71) MESCHKOWSKI 1971, S. 3

72) RICHTER 1954, S. 49

das zweite plädieren. Beide Standpunkte sollen im folgenden skizziert werden, da auf ihrer Grundlegung später eine fachdidaktische Entscheidung zu fällen ist.

2.2.6. Der subjektivistische Standpunkt

Die SUBJEKTIVISTEN[73] gehen in ihrer Theorie aus vom vorwissenschaftlichen, psychologischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, den wir in der Alltagssprache benützen in der Form von " gut möglich " , "ziemlich sicher" etc.

Ihr Hauptziel besteht darin, diesen Wahrscheinlichkeitsbegriff, den man vielleicht am ehesten als "Grad der Erwartung" (degree of belief) oder "intuitives Erwartungsgefühl" bezeichnen kann, zu präzisieren in dem Sinne, daß dafür Randbedingungen festgelegt werden. Das heißt genauer: jedermann ist frei darin - auf Grund seines Vorwissens und seiner Erfahrungen - Ereignissen beliebige Wahrscheinlichkeitswerte zuzuordnen; zu subjektiven Wahrscheinlichkeiten im engeren Sinne, zu mathematischen Objekten werden diese jedoch erst auf Grund bestimmter "Kohärenzbedingungen", auch "Konsistenzbedingungen" genannnt, wozu etwa gehört, daß das Individuum die subjektive Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A, das, falls es eintritt, zwangsläufig das Ereignis B nach sich zieht, als höchstens so hoch ansetzt, wie die Wahrscheinlichkeit von B.
F. v. KUTSCHERA umreißt das Ziel der Subjektivisten so[74]:

> " ...will die Theorie der subjektiven Wahrscheinlichkeit einen allgemeinen Rahmen für die Verknüpfung rationaler Glaubensannahmen entwickeln, aus dem sich dann Normen für eine konsistente und konsequente Entwicklung von Glaubensannahmen entnehmen lassen."

Bei der Erstellung dieses Rahmens gehen die SUBJEKTIVISTEN davon aus, daß es eigentlich nicht sehr plausibel ist, anzunehmen, ein Individuum würde von vorneherein Ereignisse quantitativ mit Zahlen (= Wahrscheinlichkeiten =) belegen. Es ist eher plausibel anzunehmen, daß das Individuum Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit vergleicht, etwa in der Form: " Das Ereignis A dürfte eher eintreten als das Ereignis B. " etc.

Diese Idee, zunächst einmal den intuitiven Wahscheinlich-

---

73) profilierte Vertreter sind u. a. SAVAGE 1954 und DE FINETTI - 74) v. KUTSCHERA 1972, S. 47

keitsbegriff durch eine qualitative Ordnungsstruktur axiomatisch festzulegen und darauf dann ein strikt verträgliches[75] quantitatives Wahrscheinlichkeitsmaß zu konstruieren, läßt sich nach GOTTINGER schon bei BERNSTEIN in einer Arbeit von 1917 nachweisen[76], wurde von DE FINETTI (1937) aufgegriffen, und ist in neuerer Zeit wieder Gegenstand detaillierter Untersuchungen geworden.[77]

Man geht dabei aus von einem "komparativen" Wahrscheinlichkeitsfeld[78], was als Tripel $(M, \mathcal{A}, \preccurlyeq)$ definiert ist, wobei

M eine nichtleere Menge

$\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen M und

$\preccurlyeq$ eine Relation auf $\mathcal{A}$ ist.[79]

Die axiomatische Fixierung geschieht durch die Forderung, daß $\mathcal{A}$ ein σ - Körper über M ist, sowie durch die folgenden fünf intuitiv mehr oder weniger einleuchtenden Axiome. (A, B, C ... seien Elemente von und als "Ereignisse" bezeichnet.)

Axiom 1 $A \preccurlyeq B \;\wedge\; B \preccurlyeq A$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ (Konnexität)

Axiom 2 $A \preccurlyeq B \;\wedge\; B \preccurlyeq C \longrightarrow A \preccurlyeq C$ (Transitivität)

Axiom 3 $\emptyset \preccurlyeq A$ für alle $A \in \mathcal{A}$

Axiom 4 $A \cdot C = B \cdot C = \emptyset \longrightarrow (A \preccurlyeq B \longleftrightarrow A \cup C \preccurlyeq B \cup C$ (Monotonie)

Axiom 5 Ist A_1, A_2 ... eine Folge von Ereignissen, für die gilt $A_i \subset A_{i+1}$, so gilt $\bigcup_i A_i \preccurlyeq B$, wenn für alle i gilt: $A_i \preccurlyeq B$ (Stetigkeit)

Es läßt sich nun zeigen,[80] daß es zu jedem komparativen Wahrscheinlichkeitsfeld, das Axiom 1 - 5 erfüllt, eine reellwertige Funktion p auf gibt, die die KOLMOGOROFFschen Axiome erfüllt und zusätzlich mit der Relation "$\preccurlyeq$" im folgenden Sinne verträglich ist:

$$A \preccurlyeq B \longleftrightarrow p(A) \preccurlyeq p(B)$$

---

75) wenn "$\preccurlyeq$" die betrachtete Ordnungsrelation ist, p das quantitative Wahrscheinlichkeitsmaß und A, B beliebige Ereignisse sind, so heißt "strikt verträglich": $A \preccurlyeq B \leftrightarrow P(A) \preccurlyeq p(B)$

76) vw. GOTTINGER 1974, S. 21 - 77) vgl. GOTTINGER 1974 - 78) ich folge hier der Darstellung v. KUTSCHERAS 1972, S. 46 ff und gebe ein Axiomensystem unter vielen möglichen an, das mir vom fachdidaktischen Standpunkt aus besonders bemerkenswert erscheint. - 79) die anschaulich etwa bedeutet: "... ist höchstens so wahrscheinlich wie ...". Auf Grund der Darstellungssätze von LOOMIS/SIKORSKI in: Sikorski 1964 ist es keine wesentliche Einschränkung, daß "$\preccurlyeq$" nur für Mengen definiert ist. Man kann "$\preccurlyeq$" ebenso auf einer allgemeinen σ - Ereignisalgebra von Propositionen betrachten. Vgl. etwa GOTTINGER 1974 -80) v. KUTSCHERA 1972 S. 57

Damit hat die subjektivistische Theorie eine Begründung der auf dem KOLMOGOROFFschen Axiomensystem beruhenden abstrakten mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie gegeben, wenn man "Begründung" einer Theorie W mit OBERSCHLEP (1966, S.347) auffaßt als:

> "...Einordnung von W in eine (intuitiv als elementarer angesehene) Theorie T, in der die Grundbegriffe von W als definierbare Größen von T auftreten, so daß die Axiome von W beweisbare Sätze von T werden."

Die subjektivistische Theorie ist nicht psychologistisch in dem Sinne, daß sie erforschen will, ob die Menschen sich in stochastischen Situationen tatsächlich an die Axiome 1 - 5 halten. DE FINETTI (1937, S. 111) stellt hier eindeutig klar:

> "But in order to avoid frequent misunderstandings it is essential to point out that probability theory is not an attempt to describe actual behavior; its subject is coherent behavior and the fact that people are only more or less coherent is inessential."

Nur für den Fall, daß sich jemand köhärent verhält im Sinne von Axiom 1 - 5[81], unterliegen seine Wahrscheinlichkeitserwartungen - in Zahlen zwischen O und 1 ausgedrückt - bestimmten Kalkülregeln. DE FINETTI (1949, S. 84)

> " Le calcul des probabilités est alors la théorie des conditions que tout sujet O est obligé de respecter, s'il veut garder la cohérence: dans l'évaluation de chaque probabilité il est libre de lui attribuer une valeur quelconque entre O et 1 selon son opinion, mais il est tenu à respecter les liaisons entre les probabilités d'événements liés (par exemple le théorème des probabilités totales: $p = p_1 + p_2$)."

BOREL (1924) und RAMSEY (1926) bemerkten, daß es theoretisch durchaus möglich ist, den zwar nicht konstanten, sondern durch Erfahrungen veränderlichen "Grad der Überzeugung" (= degree of belief =) einer Person zu messen, - und zwar durch sein Wettverhalten.

Matalon (1967, S. 532) schreibt hierzu:

> "Si cette personne est parfaitement cohérente, et on a admis qu'elle est, on peut montrer que ses différents paris sont ceux qui maximisent son espérance

---

81) bzw. im Sinne der drei KOLMOGOROFFschen Axiome

mathématique, ses plausibilités, ou degrés de croyance, ayant toutes les propriétés des probabilités. On a ainsi donné un statut opérationel à la notion de probabilité personnelle ou subjective."

Aus diesem Ansatz heraus hat sich ein eigener Zweig der subjektivistischen Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt, in dem die subjektiven Wahrscheinlichkeiten als "faire Wettquotienten" interpretiert werden.[82]

Hätte sich die subjektivistische Theorie damit begnügt, das übliche wahrscheinlichkeitstheoretische Axiomensystem von KOLMOGOROFF einfach einzubetten in ein plausibleres Axiomensystem über qualitative Wahrscheinlichkeiten, wie es im letzten Abschnitt geschildert wurde, hätten die Subjektivisten vermutlich nicht den teilweise erbitterten Kampf zwischen Subjektivisten und Objektivisten heraufbeschworen. Der wahre Grund für den Grundlagenstreit der beiden Wahrscheinlichkeitsrichtungen liegt im Philosophischen und zwar im wesentlichen in der von den Subjektivisten immer wieder betonten Hauptaussage, daß Wahrscheinlichkeitsurteile nur sinnvoll sind in Bezug auf ein bestimmtes Individuum und dessen Informationsstand,[83] und daß sie nicht von der äußeren Realität abhängen, es sei denn, das Individuum bekommt aus der äußeren Realität neue Informationen, auf Grund derer es seine Wahrscheinlichkeitsbewertungen oder sein Wettverhalten ändert.

Vor allem hier ist der Ansatz für eine Kritik der Objektivisten, die eine Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik erstellen wollen, die unabhängig ist vom persönlichen "Dafürhalten" des Individuums.

---

82) vgl. v. Kutschera 1972, S. 68 - 83) vgl. De Finetti 1972, S. 192

2.2.7. Der objektivistische Standpunkt

Die OBJEKTIVISTEN oder auch "FREQUENTISTEN" genannt[84], zu denen von der Philosophie her vor allem POPPER (1971), von der Mathematik her FISHER (1956) und NEYMAN (1933) zählen - darüber hinaus aber, wie MATALON (1967, S. 39) bemerkt, "...alle Mathematiker, die keine Philosophie treiben..." - werfen der subjektivistischen Theorie vor allem vor, daß sie nur subjektive Auffassungen nach gewissen Kalkülregeln umforme, die Tatsache objektiver Gegebenheiten in der Natur, wie etwa die Stabilität von relativen Häufigkeiten überhaupt nicht berücksichtige und somit als Theorie zu naturwissenschaftlichen Prognosen gar nicht fähig sei.

POPPER (1971, S. 109 f) meint etwa hierzu:

> "Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nach dieser Auffassung gar keine Berechnungsmethode im Sinne einer empirisch-naturwissenschaftlichen Berechnung (Prognostizierung von Ereignissen), sondern sie gestattet nur logische Umformungen dessen, was wir wissen...wir bekennen uns somit zu einer objektiven Interpretation; vor allem, weil, wie wir glauben, nur durch diese die empirischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgeklärt werden können."

Ähnlich argumentiert F. v. KUTSCHERA (1972, S. 111) gegen die subjektivistische Auffassung. Andere Ansatzpunkte der Kritik der OBJEKTIVISTEN sind etwa die konsequente Anwendung der BAYESschen Methode[85], nach der bedingte Wahrscheinlichkeiten p (E/H) als Grundlage genommen werden, eine Hypothese H abzulehnen[86], oder aber die Tatsache, daß die auf Grund der

---

84) es besteht Dissens über diese Bezeichnungen. Manchmal werden auch die OBJEKTIVISTEN als FREQUENTISTEN bezeichnet, die auf dem Boden der v. MISESschen Grenzwertdefinition stehen. NEYMAN wird von Mathematikern manchmal als OBJEKTIVIST, aber nicht als FREQUENTIST angesehen, während POPPER umgekehrt als FREQUENTIST, aber nicht als OBJEKTIVIST gesehen wird. Meines Wissens gibt es außer v. KUTSCHERA 1972 und MATALON 1967 zu diesem Thema keine geschlossene Darstellung. Ich richte mich im folgenden nach v. KUTSCHERA 1972, wonach für OBJEKTIVISTEN (=FREQUENTISTEN=) "Wahrscheinlichkeit" immer die Bedeutung "Stabilität einer relativen Häufigkeit" hat.

85) vw. S. 56 Die besondere Thematik zwingt mich, hier auf spätere Teile meines Aufbaus zu verweisen.

86) vgl. hierzu FISHERs Kritik 1956, S. 39

Axiome 1 - 5 in kanonischer Weise definierbare Relation[87] " = " (gleichwahrscheinlich) wegen A_1 und A_2 transitiv ist, die korrespondierende vorwissenschaftliche Relation aber sicher nicht transitiv ist.[88]

Abgesehen von der Kritik an der subjektivistischen Auffassung sind sich die Objektivisten vor allem in folgendem einig: Eine Wahrscheinlichkeitsaussage der Form p ($\{3\}$) = 1/6 beim Würfelexperiment soll etwas Objektives über die Natur aussagen. Außerhalb des willkürlichen Rahmens individueller menschlicher Bewertung und Erwartung bezeichnet sie eine intrinsische Eigenschaft des Würfels und hat nur etwas zu tun mit den relativen Häufigkeiten, die sich bei wiederholten Experimenten ergeben.[89]

Besonders deutlich wird dies etwa bei HENGST (1971, S. 73):

> "Wenn sich auch die Zahl, in deren Nähe die relativen Häufigkeiten bleiben, niemals exakt, sondern immer nur mit einer kleineren oder größeren Unschärfe angeben läßt, die allerdings beliebig verkleinert werden kann, so müssen wir doch die Existenz einer solchen Zahl als einer objektiven physikalischen Größe annehmen oder postulieren. Wir nennen sie die empirische Wahrscheinlichkeit."

Konsequenterweise schreiben die OBJEKTIVISTEN auch nur Ereignistypen (Kollektiven) Wahrscheinlichkeiten zu, nicht aber singulären Ereignissen oder Hypothesen.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff, auf dem die objektivistische Theorie aufbaut, ist trotz seiner Schwächen, vor allem bei Philosophen[90] , aber auch bei manchen Lehrbuchautoren der v. MISESsche. Die Klassiker der objektivistischen Wahrscheinlichkeitstheorie wie KOLMOGOROFF[91] und vor allem NEYMAN sind hierbei wesentlich vorsichtiger in ihren Aussagen, wohl wissend, daß eine solche Aussage von einer '<u>beliebig</u> verkleinerbaren Unschärfe', wie sie etwa in dem obigen Zitat von HENGST zum Ausdruck kommt, mathematischer Strenge nicht genügt.

Zwar sagt NEYMAN in seiner Selbstdarstellung[92]:

> "Also the Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit which I helped to translate into English, confirmed me as a radical 'frequentist', intent (sic) on treating probability as a mathematical idealization of relative frequency."

---

87) vgl. S. 43 - 88) vgl. VIETORIS 1951 S. 69 -89) vgl. v. KUTSCHERA 1972, S. 88 -90) vgl. v. KUTSCHERA 1972, S. 90
91) vgl. KOLMOGOROFF 1965[2] , S. 254,238 -92) NEYMAN 1967 (Author's note, o. S.)

Aber der letzte Nebensatz drückt aus, worauf es NEYMAN ankommt. Wahrscheinlichkeit wird von ihm als theoretischer Begriff im Rahmen eines mathematischen Modells gesehen, dessen Bedeutung ("meaning") relative Häufigkeiten bildet. Auch hierbei gibt es Ansätze zur Kritik, da letzten Endes doch die Stabilität relativer Häufigkeiten postuliert wird. Und hier ist etwa einzuhaken. Die OBJEKTIVISTEN vertrauen einfach auf ein der Natur eigentümliches Konvergenzverhalten, ohne daß sie indessen die Unschärfe, die Abweichung von der "wahren" Wahrscheinlichkeit im physikalisch - mathematischen Sinne etwa durch ein Intervall anzugeben vermögen. NOLFI (1956, S. 70) meint in Bezug auf die objektivistische Auffassung:

> "Die Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält keinen Instanzenweg, der außerhalb jedem Zweifel zur Bestimmung der Grundwahrscheinlichkeit führen würde. Jede Zahl zwischen 0 und 1 kann die unbekannte reale Grundwahrscheinlichkeit sein, vorausgesetzt, daß eine solche existiert, was mit guten Gründen bezweifelt werden kann; denn die Annahme, die Natur schreibe einen wahren Wert vor, ist möglicherweise eine blosse Fiktion. - Damit wird deutlich ersichtlich, daß die Wahrscheinlichkeitsmathematik ebenfalls nicht unmittelbar an die Wirklichkeit verankert werden kann, daß sie sogar der wichtigsten Bausteine, die für eine lückenlose zweite Konstruktion der Wirklichkeit erforderlich wären, entbehrt."

Noch schärfer drückt sich DE FINETTI (1949, S. 91) aus:

> "Un événement peut se vérifier ou non: tout ce qu'il y a d'objectif en lui se réduit à cette alternative d'être vrai ou faux. Plus encore on peut dire que la 'réalité objective' n'est d'autre chose que le schéma représentative des notions et phénomènes correspondant à des événements observables.
> La seule évaluation de probabilité 'objectivement juste' ou 'objectivement jouissant d'une situation de privilège' ou 'appartenant au domaine de la réalité objective' (défini plus haut), serait celle qui attribuerait la probabilité 0 aux autres."

Weitere Kontroversen zwischen SUBJEKTIVISTEN und OBJEKTIVISTEN beziehen sich auf die Deutung statistischer Aussagen und die Anwendung statistischer Verfahren, vor allem das BAYESsche Verfahren, auf das ich noch eingehen werde. Es

seien - zum Abschluß der Diskussion zum Wahrscheinlichkeitsbegriff - nur noch einige grundsätzliche Bemerkungen angefügt.

Die Tatsache, daß sowohl unter den SUBJEKTIVISTEN als auch den OBJEKTIVISTEN bedeutende Mathematiker zu finden sind, zeigt, daß wenigstens im Augenblick mit mathematisch - philosophischen Mitteln keine Klärung der Grundlagenproblematik herbeigeführt werden kann. Es bleibt abzuwarten, wie sich die Diskussion weiterentwickelt, insbesondere, ob es in Zukunft gelingen wird, beide Standpunkte innerhalb eines umfassenden zu integrieren. Es muß bereits an dieser Stelle bemerkt werden, daß der Streit um den Wahrscheinlichkeitsbegriff vom Standpunkt der Fachdidaktik nicht nur von seiner mathematisch-philosophischen Seite anzusehen ist.[93] Andere Aspekte werden in späteren Kapiteln Gegenstand der Betrachtung sein. Selbverständlich ist mit solchen weitergehenden Betrachtungen keine Einmischung in den Grundlagenstreit der Stochastiker beabsichtigt.

93) vgl. S. 219

2.3. Exemplarische Darstellung stochastischer Arbeitsweisen.

2.3.1. Mehrstufige Experimente und bedingte Wahrscheinlichkeit

Ein der Mathematik eigentümlicher Zug besteht darin, aus einfachen Begriffen durch Verknüpfung zu komplizierteren zu gelangen. Ein typischer Fall hierfür in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der Begriff des mehrstufigen Zufallsexperiments, das man sich als Hintereinanderschaltung elementarer Zufallsexperimente vorstellen kann.

Dabei hängt es von der Versuchsanordnung ab, welchen neuen Ereignisraum im mathematischen Modell man dem zusammengesetzten Experimenten zuordnet und wie man diesen aus den Ereignisräumen der elementaren Versuche zusammensetzt.

Beispielsweise erscheint es plausibel, im Falle des zweimaligen Ziehens (mit jeweiligem Zurücklegen) aus einer Urne von 6 Zetteln mit den Zahlen 1 bis 6 als Ereignisraum das kartesische Produkt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zu Grunde zu legen. Führt man den Versuch ohne Zurücklegen durch, ist es eher plausibel, beim Übergang ins mathematische Modell den Ereignisraum $(\{1, 2, \ldots 6\} \times \{1, 2, 3, \ldots 6\}) \setminus \{(i, i) \mid i \in N\}$ zu wählen. In beiden Fällen wird man zudem aus Symmetriegründen die Elementarereignisse als gleichwahrscheinlich ansetzen, womit die Wahrscheinlichkeitsfelder[94] festgelegt sind.

Nicht immer geht das so einfach. Oft ist es äußerst schwierig, einen "passenden" Ereignisraum für das zusammengesetzte Experiment anzugeben. Das folgende Beispiel motiviert eine neue Begriffsbildung.

Wir würfeln mit zwei fairen Würfeln, bei denen die Zahlen von 1 - 3 auf rotem, die Zahlen von 4 - 6 auf blauem Grund eingetragen sind, und interessieren uns für die Summe der Augenzahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei auf eine Augenzahl von

---

94) vw. S. 31

mindestens 9 zu kommen, ist 10/36. Dieses Ereignis werde mit E bezeichnet. Der Wurf wird ausgeführt und wir erkennen von weitem nur, daß beim ersten Würfel eine blaue, beim zweiten Würfel eine rote Seitenfläche obenauf liegt. Damit hat sich der ursprüngliche Ereignisraum von 36 Ausfällen verkleinert auf den neuen Ereignisraum F = $\{(4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3)\}$

Auf Grund der gewonnenen Information ergibt sich eine neue (subjektive) Wahrscheinlichkeit von 1/9 = (1/36)/(9/36) = $p(E \cap F)/p(F)$.

Diese und ähnliche Beispiele motivieren die folgende Definition:

> Sei $(E, \mathcal{A}, p)$ ein Wahrscheinlichkeitsfeld. E, F seien Ereignisse mit $p(F) \neq 0$. Dann ist die durch F "bedingte Wahrscheinlichkeit", bezeichnet als $p(E/F)$, definiert durch:
>
> $$\text{I.} \quad p(E/F) = :\frac{p(E \cap F)}{p(F)} \quad .$$

Diese Begriffsbildung wird im axiomatischen Rahmen durchgeführt, ohne daß damit die Wahrscheinlichkeitsfunktion p eine bestimmte Bedeutung, sei es im subjektivistischen Sinne oder im objektivistischen, hätte. Zwar ist unsere Motivation subjektivistisch bestimmt. Danach sind bedingte Wahrscheinlichkeiten einfach zu deuten als Ausdruck dafür, wie sich unser individuelles Erwartungsgefühl bei Informationsgewinn modifiziert.[95].

Es sei aber hier am Rande erwähnt, daß auch die Objektivisten eine eigene Motivation für die Begriffsbildung der bedingten Wahrscheinlichkeit haben, nämlich über relative Häufigkeiten, und ihr eine bestimmte Bedeutung zumessen, etwa so wie R. V. MISES in Form der "bedingten Kollektive".[96]

Den Hauptgewinn liefert der neue Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit für Rechnungen zu mehrstufigen Zufallsexperimenten ab. Betrachten wir etwa das folgende klassisch - grausam - schöne Problem:

Ein zum Tode verurteilter Gefangener soll noch eine letzte Chance erhalten. Er wird vor zwei Urnen geführt, die zusammen zehn weisse und zehn schwarze Kugeln enthalten. Er muss sich

---

95) vgl. GOTTINGER 1974, S. 18: "Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind der probabilistische Ausdruck des Lernens durch Erfahrung."

96) vgl. V. MISES 1929

zufällig für eine der beiden Urnen entscheiden und aus dieser eine Kugel ziehen. Schwarz bedeutet Rot, Weiss bedeutet Begnadigung. Der Gefangene erbittet sich die Vergünstigung, die Urnen vorher selbst füllen zu dürfen, was ihm gewährt wird. Wie muß er die 20 Kugeln verteilen, damit er eine größtmögliche Chance hat?

Die übliche Lösung sieht so aus: Wir ordnen dem zweistufigen Versuch den Ereignisraum $E = \{I, II\} \times \{S, W\}$ zu[97]. Sei A_1 das Ereignis $\{I\} \times \{S, W\}$, A_2 das Ereignis $\{II\} \times \{S,W\}$. Weiter sei $B_1 = \{(I,W)\}$ und $B_2 = \{(II,W)\}$ $B = \{I,II\} \times \{W\}$ Gesucht ist offenbar die Verteilung, für welche die Wahrscheinlichkeit von B maximal wird. Es ergibt sich:

$$p(B) = p(B_1) + p(B_2) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) = p(B/A_1)p(A_1) + p(B/A_2)p(A_2).$$

Setzt man nun voraus, daß sich in Urne I genau x weisse und y schwarze Kugeln befinden, dann sind in Urne II genau 10 - x weisse und 10 - y schwarze Kugeln. Damit ergibt sich weiter:

$$p(B) = x/(x+y) \cdot 1/2 + (10-x)/(20-x-y) \cdot 1/2.$$

Durch Anwendung der üblichen Methoden zur Bestimmung von Maxima erhält man als optimale Verteilung diejenige, bei der in einer Urne eine weiße Kugel liegt, während alle anderen Kugeln in der zweiten Urne liegen - eine Lösung, die auch anschaulich einleuchtet.

Es zeigt sich an diesem einfachen Beispiel schon, daß in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei praktischen Problemen keineswegs die bedingte Wahrscheinlichkeit nach der Definition I. berechnet wird. Tatsächlich werden, wie in unserem Beispiel, irgendwelche Annahmen über die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(B/A_i)$ gemacht, und auf Grund dieser Annahmen wird $p(B \cap A_1)$ aus der zur Definitionsgleichung I äquivalenten Gleichung II $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$ bzw. $p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B/A)$ berechnet. Diese Merkwürdigkeit veranlaßt V. D. WAERDEN (1965, S. 6) zu fordern:

> "Man sollte eigentlich die bedingten Wahrscheinlichkeiten nicht durch I. definieren, sondern sie als undefinierte Begriffe der Axiomatik zugrundelegen. Man könnte dann II. als Axiom hinzunehmen."

---

97) dabei bedeutet I: erste Urne und II: zweite Urne

In der alltäglichen Praxis wird man die Aufgabe noch einfacher lösen, indem man sie in Form eines verzweigten Pfades darstellt

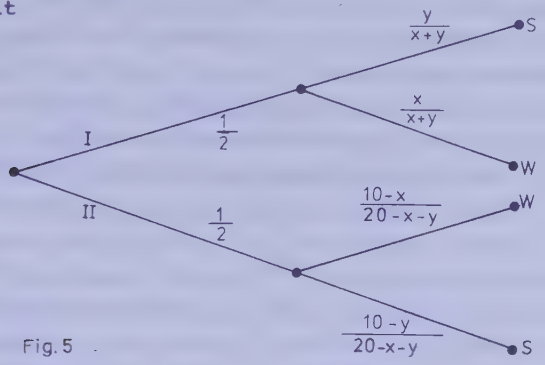


Fig. 5

und die Wahrscheinlichkeit eines Pfades als Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten dieses Pfades berechnet.
In Frage kommen alle Pfade, die bei "Weiss" enden, und man erhält dasselbe Ergebnis wie oben. Interessant bei dieser Standardlösung ist die Tatsache, daß die Mengensprache keine Rolle spielt, ja nicht einmal auftritt.[98]
Für den Fall, daß sich I. bzw. II reduziert auf die einfachere Aussage III: $p(A \mid B) = p(A)$, was äquivalent ist zu:

$$\text{IV: } p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

nennt man die beiden Ereignisse A und B "unabhängig".
Wirft man beispielsweise zweimal hintereinander mit einer Münze und sei A das Ereignis, beim ersten Wurf "Zahl" zu werden, B das Ereignis, beim zweiten Mal "Zahl" zu werfen.
Dann gilt: $A = \{Z\} \times \{W, Z\}$ $\quad B = \{W, Z\} \times \{Z\}$, $A \cap B = \{(Z, Z)\}$

$$p(A \cap B) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = p(A) \cdot p(B).$$

Das heißt, daß die beiden Ereignisse unabhängig sind.[99] Man erweitert diese Sprechweise auf die betreffenden Zufallsexperimente und sagt: die beiden Münzenwürfe sind zwei voneinander unabhängige Zufallsexperimente.[100]

---

98) dies würde für den Vorschalg FREUDENTHALs sprechen, im Stochastikunterricht aller Stufen Wahrscheinlichkeitsaussagen über Propositionen statt Mengen abzugeben. Vgl. FREUDENTHAL 1974, S. 3
99) genauer: "stochastisch oder statistisch unabhängig"
100) vgl. GOLDBERG 1964, S. 105-106

Der Begriff der Unabhängigkeit spielt sowohl in der Grundlagendiskussion als auch im Bereich der Anwendungen eine große Rolle. Auf ihm basiert u. a. die frequentistische Definition der Wahrscheinlichkeit, die Folgen von unabhängigen Ereignissen voraussetzt. Hierin liegt ein "circulus vitiosus", wenn man nicht von vornherein das Prinzip voraussetzt, daß die wahrscheinlichkeitstheoretische Unabhängigkeit auf die physikalische Unabhängigkeit zurückgeführt wird.[101] Dieses Prinzip spielt vor allem in den Anwendungen eine tragende Rolle. Es ist - ähnlich wie bei den bedingten Wahrscheinlichkeiten -[102] in den Anwendungen keineswegs so, daß man sich zuerst die Ereignisräume mit mengentheoretischen Methoden zurechtlegt, es sei denn, man bezweckte eine strenge Beweisführung, sondern man nimmt einfach an, daß zwei Zufallsexperimente unabhängig sind, wenn der Ausgang des ersten keinen Einfluß auf das zweite zu haben scheint.[103] Man versteht dann IV. nicht als Definition, sondern spricht von der "Produktregel". Das bedeutet aber, daß die Theorie nicht nahtlos in die Praxis übergeht, und mit aus diesem Grunde mag CARNAP einmal etwas boshaft formuliert haben:

> "Sehr häufig besteht in der Wissenschaft ein Gegensatz zwischen dem, was ein Theoretiker tatsächlich tut, und dem, was er zu tun behauptet, wenn man ihn danach fragt." (CARNAP/STEGMÜLLER 1959, S. 30)

Allerdings muß man zugestehen, daß sich Mathematiker, wenn sie die Produktregel verwenden, sich stets dabei bewußt sind, daß sie dabei mit einer Modellvorstellung arbeiten, die überprüft und modifiziert wird, wenn die daraus abgeleiteten Prognosen in der Realität kein Korrelat besitzen.

Fassen wir zusammen: der Begriff der Unabhängigkeit ist fundamental sowohl in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihren Anwendungen, als auch im täglichen Leben.[104] Nach KOLMOGOROFF hat der Begriff der Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie sogar ihr "eigenartiges Gepräge" gegeben. Die Tatsache,

---

101) vgl. v. KUTSCHERA 1972, S. 97f
102) vgl. S. 52
103) vgl. V. D. WAERDEN 1965, S. 7
104) dies wird in Kapitel II ausgeführt werden

daß dieser fundamentale Begriff in den üblichen Axiomen gar nicht vorkommt und, wenigstens in den Anwendungen, nicht in der mengentheoretischen Formulierung gebraucht wird, mag mit ein Grund dafür sein, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung erst so spät axiomatisiert wurde und relativiert gleichzeitig die Bedeutung des axiomatischen Vorgehens beim Erlernen stochastischer Denkweisen in erheblichem Maße.

2.3.2. BAYESsche Methoden[105]

Mit dem Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit läßt sich über die Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit, die im letzten Abschnitt implizit bei der Berechnung von "Pfadwahrscheinlichkeiten" vorkam, rein mathematisch der Satz von BAYES beweisen, der folgendermaßen lautet:
Sei $\{A_n\}$ ein vollständiges Ereignisfeld, d. h. eine Klasseneinteilung des Ereignisraumes E durch höchstens abzählbar viele Ereignisse A_n, und A sei ein Ereignis. Dann gilt:

$$p(A_i/A) = \frac{p(A/A_i) \cdot p(A_i)}{\sum_n p(A/A_i) \cdot p(A_n)}$$

Der Satz ist ohne Zusatzannahmen aus den drei KOLMOGOROFFschen Axiomen ableitbar und wird, wenn überhaupt, immer dann angewandt, wenn aus dem Stattfinden eines Ereignisses A auf die Wahrscheinlichkeit der Hypothese A_i geschlossen werden soll. Man nennt ihn deswegen auch Satz über die Wahrscheinlichkeit von Ursachen. Ein Beispiel soll dies erläutern:[106]
Wenn bei einem Vaterschaftsprozess feststeht, daß nur zwei Personen X, Y als Väter des Kindes in Frage kommen, wird man für das Ereignis "X ist der Vater des Kindes" die Wahrscheinlichkeit 1/2 ansetzen, wenn man über keine sonstigen Informationen verfügt. Diese a-priori-Festsetzung hat rein subjektiven Charakter und ist im Rahmen der objektivistischen Theorie gar nicht sinnvoll. Erfährt man nun etwas über die Blutgruppen der einzelnen beteiligten Personen, so kann über den Satz von BAYES die a-priori-Wahrscheinlichkeit revidiert werden.
Stehe etwa B für das Ereignis, daß das Kind die Blutgruppe Z hat, so sind die Wahrscheinlichkeiten p(B/A) bzw. $p(B/\overline{A})$ auf Grund von Erbgesetzen bestimmbar und mögen etwa in unserem Fall 3/4 und 1/8 sein. Auf Grund der BAYESschen Formel ergibt sich:

---

105) die BAYESsche Methode beinhaltet auch den stetigen Fall. Das Prinzipielle ist jedoch schon im endlichen Fall ersichtlich

106) dieses Beispiel verdanke ich Herrn G. SCHRAGE.

$$p(A/B) = \frac{1/2 \cdot 3/4}{1/2 \cdot 3/4 + 1/2 \cdot 1/8} = 86{,}3\ \%$$

Problematisch ist hierbei einzig und allein die Festsetzung der a-priori-Wahrscheinlichkeit, die oft nur nach subjektiven Maßstäben geschehen kann. Deswegen ist die subjektivistische Wahrscheinlichkeitstheorie auch Grundlage für die BAYESsche Statistik.[107]

Wenn die a-priori Wahrscheinlichkeiten bzw. a-priori Verteilung festliegen, gibt die BAYESsche Formel im wesentlichen nur an, wie diese durch Informationen modifiziert werden können. MATALON (1967, S. 543) umreißt die Leistungsfähigkeit der BAYESschen Formel so:

> "En d'autres termes, le théorème de Bayes ne nous permet pas de nous faire une opinion à partir des incices uniquement, mais nous indique simplement, comment notre jugement préalable doit être modifié par eux."

Es gibt auch Beispiele, bei denen trotz Zusatzinformationen keine 'Modifikation' der a-priori-Wahrscheinlichkeit stattfindet. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist das BERTRANDsche Kästchenproblem, das selbst von ernsthaft zu nehmenden Mathematikern wie E. CZUBER (1899) falsch gelöst wurde. Es geht dabei um folgendes:[108]

Es liegen drei äußerlich gleiche Kästchen A, B, C mit je zwei Lädchen vor; im Kästchen A enthält jedes Lädchen eine Goldmünze, in B jedes eine Silbermünze, in C das eine 1 Gold-, das andere eine Silbermünze. Man öffnet ein Lädchen und besieht sich den Inhalt; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es sich um das Kästchen C handelt, wenn man eine Goldmünze sieht?

Der übliche Fehlschluß besteht darin, daß man sich sagt: Es kommen nur noch die beiden Kästchen A und C in Frage, d. h. die Wahrscheinlichkeit für C ist 1/2. Wie die folgende genauere Analyse mit Hilfe der BAYESschen Methode zeigt, ist diese Lösung nicht konsistent.

Sei nämlich B das Ereignis beim zufälligen Öffnen eines der drei Kästchen an eine Goldmünze zu kommen. A_1, A_2, A_3 seien die Ereignisse, daß man dabei zufällig das erste, zweite oder dritte Kästchen gewählt hat. Damit sind die Voraus-

---

107) vgl. GOTTINGER 1974, S. 16

108) vgl. CZUBER 1914, S. 30

setzung des BAYESschen Satzes erfüllt. Es gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p(A_3/B) = \frac{p(B/A_3) \cdot p(A_3)}{p(B/A_1)\cdot p(A_1) + p(B/A_2)\cdot p(A_2) + p(B/A_3)\cdot p(A_3)}$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/3}{1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3} = 1/3$$

Das aber ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das dritte Kästchen per Zufall zu wählen ohne jegliche Zusatzinformation. Konkret bedeutet dies, daß sich bei einem im subjektivistischen Sinne kohärent denkenden Individiuum durch diese Zusatzinformation das subjektive Erwartungsgefühl nicht ändern darf, und das eben macht das Paradoxe im BERTRANDschen Kästchenproblem aus.

Bemerkenswert ist bei der mathematischen Behandlung des Problems vielleicht noch, daß auch hierbei die Mengensprache keine Rolle spielt.[109]

Über die geschichtliche Bedeutung des BAYESschen Satzes schreibt MENGES (1968, S. 105):

> "Das Theorem von BAYES markiert in der historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Übergang zur theoretischen Statistik, aber auch heute noch manifestiert sich in ihm die Nahtstelle zwischen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik...
> Die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor BAYES ist stets von bestimmten Modellen, Annahmen oder Hypothesen ausgegangen und hat nach der Wahrscheinlichkeit für bestimmte Ereignisse gefragt. BAYES hat diese Betrachtung auf den Kopf gestellt, indem er, von realisierten Ereignissen ausgehend, nach der Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von Modellen, Annahmen oder Hypothesen fragte. Er verwandelte damit die Wahrscheinlichkeitsrechnung wie TIMERDING kommentierte, '... aus einem bloßen Spiel des Geistes in eine ernste Wissenschaft...'."

---

109) wie auch in den Beispielen von ENGEL 1973, S. 146-147. Dies schließt nicht aus, daß bei ähnlichen Problemen wie dem CZUBERschen Kästchenproblem für eine genauere Analyse doch einmal Betrachtungen zu adäquaten Ereignisräumen nötig werden. Vgl. hierzu SCHRAGE 1971, S. 309-312

2.3.3. Zufallsvariable

Wohl der wichtigste Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt ist der Begriff der Zufallsvariablen, auch "stochastische Größe", "zufällige Größe" oder einfach "Stochastik" genannt. Er taucht versteckt schon sehr früh bei den elementarsten Zufallsexperimenten auf.
Beispielsweise interessieren beim Würfeln mit zwei Würfeln oft nicht die Ereignisse selber, sondern die Augenzahlen oder die Summe der Augenzahlen. Hier liefert ein vom Zufall abhängiger Vorgang Zahlen zwischen 2 und 12. Formalisieren läßt sich dieser Tatbestand offenbar mit dem Begriff der Abbildung, im betrachteten Beispiel als Abbildung auf der Ereignismenge E in die Menge der Zahlen von 2 bis 12.
Allgemein definiert ist eine Zufallsvariable als reelle Funktion X, die auf der Menge der Elementarereignisse definiert ist und bei der das Urbild A jedes Zahlenintervalls $(-\infty, x) \subseteq R$ ein Ereignis der betrachteten σ-algebra über dem Ereignisraum E ist.
Man ersieht hieraus, daß eine Zufallsvariable keine Variable im gewöhnlichen Sinne der Algebra ist, sondern eine (Lesbeguesmessbare) Funktion.
Zu jeder Zufallsvariablen läßt sich eine Verteilungsfunktion $F: R \longrightarrow [0, 1]$ angeben mit: $F(x) = p\{ e \in E/X(e) < x \}$.
Die Umständlichkeit dieser Schreibweise, FREUDENTHAL (1974, S. 265) spricht in diesem Zusammenhang sogar von "... orgies of formalism..."), führt in der ständigen Praxis, selbst bei nicht primär anwendungsorientierten wahrscheinlichkeitstheoretischen Darstellungen dazu, daß man einfach schreibt: $F(x) = p(X < x)$ oder aber um anzudeuten, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion p ja für Ereignisse definiert ist, in der Form $F(x) = p\{X < x\}$, und die rechte Seite einfach spricht als: "Die Wahrscheinlichkeit, daß X kleiner ist als x...". Als Konsequenz fordert FREUDENTHAL, Wahrscheinlichkeit von vorneherein über Propositionen statt über Mengen zu betrachten. Überhaupt wird die Formalisierung einer Zufallsgröße als messbarer Funktion,

---

110) vgl. hierzu die Bemerkung von DINGES auf S. 33/34

es sei denn zu Beweiszwecken, von durchaus profilierten Stochastikern als überflüssig, ja sogar als schädlich abgelehnt. Stattdessen wird die "Pflege von bewährten Sprechweisen" empfohlen, wie etwa:[111]

> "Eine Größe, die wir unter Beteiligung des Zufalls in die Hände bekommen, nennen wir Zufallsgröße; genauer 'Zufallsgröße mit Werten in der Menge'..."

Ihre wirklich fundamentale Bedeutung für Anwendungen gewinnen Zufallsvariablen im Rahmen von "Stochastischen Prozessen", die folgendermaßen motiviert werden können:[112]
Betrachten wir ein beliebiges Zufallsexperiment, so läßt sich der Ausgang stets durch eine reelle Zahl beschreiben, d. h. durch eine Zufallsvariable. Wird nun das Experiment zu verschiedenen Zeiten wiederholt, so ergeben sich die verschiedenen Realisierungen $X(t_1)$, $X(t_2)$... ein und derselben Zufallsvariablen zu verschiedenen Zeitpunkten.
Falls die Wiederholungen des Experiments nicht unter gleichen Bedingungen geschehen, kann man das Ganze so interpretieren, daß zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Zufallsvariablen X_t zu beobachten sind, und wir erhalten eine Familie $\{X_t\}$, $t \in T$ von Zufallsvariablen. Solche Familien mit einer Indexmenge T von Werten, die oft, aber nicht immer als Zeitpunkte interpretiert werden, heißen stochastische Prozesse.
Auf fortgeschrittener Bewußtseinsebene sind stochastische Prozesse ein derart wirksames Instrument, um physikalische zufallsabhängige Vorgänge numerisch zu beherrschen, daß man MENGES zustimmen kann:[113]

> "Der Begriff des stochastischen Prozesses ist so außerordentlich allgemein, daß man sich fragen muß, welches in der Zeit veränderliche Sein ihm nicht unterworfen ist. Die ganze Welt läßt sich als ein stochastischer Prozess auffassen."

Betrachtet man etwa Galtonbretter und führt eine Folge von Versuchen durch, so steckt dahinter ein stochastischer Prozess. "Integriert" man über die Zeit, so erhält man dabei die übliche (näherungsweise) empirische Binomialverteilung.[114]
Man kann somit nach MENGES das Galtonbrett als einen Apparat deuten, der die Dynamik eines stochastischen Prozesses in die

---

111) DINGES, H. in einem Vortrag über "Relative Häufigkeiten" gehalten am 14.1.1975 in Oberwolfach
112) nach MENGES 1968, S. 150
113) ibid. S. 146
114) auch "Bernoulliverteilung" genannt

statische Ruheform einer Verteilung bewerkstelligt.[115] Da die Zeit, z. B. bei Stichprobenerhebung, jedoch oft nur eine untergeordnete Rolle spielt und man sich für das Endergebnis interessiert, sind oft, vor allem in der Statistik die Verteilungen, entweder die zu erwartenden theoretischen oder aber die eingetretenen von primärem Interesse.
Aus dem Wunsche heraus, umfangreicheres Datenmaterial der besseren Übersichtlichkeit halber auf wichtige Daten zu reduzieren, hat man in der deskriptiven Statistik die Begriffe 'Mittelwert' und 'Streuung' geschaffen. Die korrespondierenden Begriffe bei den theoretischen Verteilungen sind 'Erwartungswert' und 'Standardabweichung'. Man geht dabei davon aus, daß Zufallsvariable diskret oder stetig sein können, d. h. einen höchsten abzählbaren oder aber einen kontinuierlichen Wertevorrat haben können.
Im ersten Fall läßt sich die Verteilungsfunktion $F(x) = p(X < x)$ angeben in der Form $\sum p(X = x_i)$, wobei die x_i die verschiedenen möglichen Realisierungen der Zufallsvariablen X darstellen.
Im zweiten Fall ist eine korrespondierende Darstellung nicht immer möglich, wohl aber dann - wie es in den meisten praxisrelevanten Fällen der Fall ist, wenn eine sogenannte Dichtefunktion f existiert. Es gilt dann:

$$F(x) = p(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Damit lassen sich Erwartungswert E und Standardabweichung einer Zufallsvariablen definieren: es sei X eine Zufallsvariable mit höchsten abzählbarem Wertevorrat x_i bzw. im stetigen Fall mit der Dichtefunktion f. Falls die Reihe $\sum |x_i| \cdot p(X=x_i)$ bzw. das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x) \cdot dx$ konvergiert, nennen wir den Wert der Summe $\sum x_i \cdot p(X = x_i)$ bzw. des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt$ den Erwartungswert E(X). Der Erwartungswert kann intuitiv gedeutet werden als arithmetischer Durchschnitt der angenommenen Werte der Zufallsvariablen X, wenn das zugrundeliegende Zufallsexperiment "öfters unter identischen Bedingungen" wiederholt wird. Präzisiert wird

115) nach MENGES 1968, S. 174

dieses intuitive Verständnis unter anderem durch das Gesetz der großen Zahl.
Die Dispersion einer Zufallsvariablen X ergibt sich als $\sigma^2 = E[(X - E(X))^2]$. σ selber wird als "Standardabweichung" bezeichnet und dient einfach als ein Maß für die zu erwartenden Abweichungen vom Erwartungswert. Daß man dafür nicht den naheliegenderen Ausdruck $E(|X - E(X)|)$ wählt, hat keinen tieferen Grund, sondern liegt einfach daran, daß sich das Rechnen mit σ als sehr viel bequemer und geschmeidiger erweist. Von besonderer Bedeutung, weil immer wieder vorkommend, sind einige Familien von Standardverteilungen, wie Gleichverteilung, Bernoulliverteilung, Normalverteilung[116] und in geringerem Maße Poisson- und hypergeometrische Verteilung. Eine Zufallsvariable X bezeichnet man als normalverteilt, wenn ihre Dichte f durch den folgenden Ausdruck, in dem μ den Erwartungswert und σ die Standardabweichung darstellt, gegeben ist:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad \sigma > 0$$

Die Normalverteilung ist von besonderer Bedeutung, zum einen, weil sie eine asymtotische Approximation für die höchst unhandliche Binomialverteilung darstellt, zum anderen, weil ihr eine Unmenge von Zufallsvariablen unterliegen. Als Beispiele seien hier Tiergewichte, Körpergrößen, Intelligenzquotienten und Stichprobenmittel erwähnt. Letztere sind in der Regel sogar dann normalverteilt, wenn die zugrundeliegenden Einzeldaten nicht normalverteilt sind. Wohl aus diesen Gründen fasste F. GALTON seine Bewunderung für die Normalverteilung in die euphorischen Worte:[117]

> "Ich kenne kaum etwas anderes, das unsere Phantasie so mitreißen kann, wie die wundervolle Form kosmischer Ordnung, die das 'Gesetz der Häufigkeit des Fehlers' ausdrückt. Die Griechen würden aus diesem Gesetz eine Person gemacht haben und hätten es als Gott angebetet, wenn sie es gekannt hätten. Unter der wildesten Konfusion herrscht es mit vollkommener Ruhe und Selbstlosigkeit. Je größer der Mob und

---

116) auch "Gauss-" oder "De Moivreverteilung" genannt
117) zitiert nach WALLIS/ROBERTS 1966, S. 297

> seine Anarchie sind, umso vollendeter ist seine Herrschaft. Es ist das oberste Gesetz der Unvernunft. Wo immer eine grosse Stichprobe chaotischer Elemente sortiert und in der Ordnung ihrer Größe aufgereiht wird, tritt eine unerwartete und wunderschöne Form der Regelmäßigkeit hinter dem Schleier der Wirrnis hervor."

Der mathematische Grund für die Universität und fundamentale Bedeutung der Normalverteilung liegt am zentralen Grenzwertsatz, der grob aussagt, daß die Summe von "sehr vielen" Zufallsvariablen, die selber nicht vormalverteilt zu sein brauchen, normalverteilt ist, wenn einige sehr weite Bedingungen erfüllt sind. Der Satz wurde 1901 von LJAPUNOFF bewiesen und später dann immer mehr verschärft. Die folgende notwendige und hinreichende Formulierung stammt von FELLER/LINDENBERG:[118]

Seien X_1, X_2... paarweise unabhängig eindimensionale Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F_1, F_2... den Erwartungswerten $E(X_k) = 0$ und den Dispersionen G_k^2. Sei weiterhin $s_n^2 = G_1^2 + ...G_n^2 \neq 0$.

Dann konvergiert die Verteilungsfunktion der normierten Summe $S_n = \frac{X_1 + X_2 + ...X_n}{s_n}$ dann und nur dann gegen eine Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Dispersion 1, wenn die Lindenbergbedingung gilt, die besagt:

Für jedes $t > 0$ konvergiert $\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|Y| \geq t s_n} Y^2 \cdot F_k\{dy\}$ gegen Null.

Der zentrale Grenzwertsatz dürfte wohl nie auf einer niedereren als der universitären Stufe einer deduktiven Behandlung zugänglich sein. Angesichts seiner fundamentalen Bedeutung ist dennoch zu überlegen, ob nicht wenigstens das intuitive Erfassen dieses Satzes, wenn auch nur durch experimentell-induktives Vorgehen, zum Wissenschatz jedes gebildeten Menschen gehören sollte.

---

118) FELLER 1966, Bd. II, S. 256

2.3.4. Gesetz der großen Zahl

Wenn man vom "Gesetz der großen Zahlen" spricht, ist im allgemeinen folgendes gemeint:
Beim Werfen einer Münze kann man zwar nicht sagen, ob "Wappen" oder "Zahl" fällt, falls man das Experiment "zufällig" einrichtet. Wenn man es aber viele Male wiederholt unter gleichen Bedingungen, so stellt man folgendes fest:

1) die relativen Häufigkeiten für das Eintreten von "Zahl" streuen um den Wert 1/2
2) je öfter das Experiment wiederholt wird, desto näher liegt die relative Häufigkeit bei 1/2.

POLYA (1963, S. 88) beschreibt dies sehr prägnant an Hand eines zum wiederholten Münzenwurf strukturgleichen Beispiels:

> "Der Regenfall ist eine Massenerscheinung. Er besteht aus einer sehr großen Anzahl von Einzelerscheinungen, aus dem Fallen einer sehr großen Anzahl von Regentropfen... Das Verhalten der Regentropfen hat etwas an sich, was wir passend als "zufallsartig" beschreiben... Wir richten unsere Aufmerksamkeit auf zwei Pflastersteine, die wir den 'rechten Stein' und den 'linken Stein' nennen... Der erste Tropfen fällt auf den linken Stein, der zweite auf den rechten, der dritte wieder auf den rechten, der vierte auf den linken und so weiter, ohne ersichtliche Regelmäßigkeit, etwa folgendermaßen: LRRLLLRLRLRRLRR
> Wir können kaum eine Regelmäßigkeit in der Reihenfolge der Regentropfen entdecken ... Andererseits liegt doch eine Art von Regelmäßigkeit in der Reihenfolge des Auffallens vor. Tatsächlich können wir mit Zuversicht sagen, daß die beiden Pflastersteine gleich nass sein werden, wenn der Regen zu Ende ist ... Aber das Ganze hat etwas Paradoxes. Wir können voraussagen, was auf lange Sicht geschehen wird, aber wir können nicht die Einzelheiten voraussehen. Der Regenfall ist eine typische zufallsartige Massenerscheinung, unvorhersagbar im Kleinen, in Bezug auf gewisse Einzelheiten, wohl aber voraussagbar in Bezug auf gewisse numerische Verhältnisse im Großen."

Auch bei diesem Beispiel zeigen sich die beiden Tatbestände 1) und 2) als Beobachtungen in der Realität - wie auch in vielen anderen, auch physikalischen Beispielen -. Dies berechtigt indessen nicht, von einem mathematischen Gesetz

zu sprechen, sondern bestenfalls von einem "empirischen Gesetz der großen Zahl"[119] oder von einem "Prinzip der großen Zahl".[120]

Es gibt indessen ein mathematisches Korrelat dieses Prinzips. Sei nämlich der Ereignisraum des einfachen Münzenwurfes $S = \{W, Z\}$ mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung[121] $p(\{W\}) = p$; $p(\{Z\}) = 1 - p$ und Ω das unendliche kartesische Produkt S^{∞}. Es erscheint adäquat, beim mehrfachen Münzenwurf Ω als Ereignismenge zu wählen und die Voraussetzung zu treffen, daß die einzelnen Versuche unabhängig sind. Damit haben wir der empirischen Folge von Münzenwürfen ein mathematisches Modell in Form eines Wahrscheinlichkeitsfeldes zugeordnet, in dem wir jetzt Zufallsvariablen X_i einführen durch:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn beim i-ten Versuch Zahl fällt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gibt die Zufallsvariable $Y_n = X_1 + X_2 \ldots X_n$ an, wie oft bei n-Versuchen "Zahl" fällt. Die Verteilung dieser ZV ist als Binomialverteilung bekannt. Es gilt:

$$p(Y_n = Y) = \binom{n}{y} p^y \cdot (1 - p)^{n-y}$$

Wie mathematisch gezeigt werden kann, gilt dann für die standardisierte Zufallsvariable $R_n = Y_n/n$:

1') der Erwartungswert von R_n ist p

2') R_n konvergiert stochastisch gegen p, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\lim P\{|R_n - p| > \varepsilon\} = 0$[122]

Offensichtlich stehen die beiden Aussagenpaare 1), 2) und 1'), 2') in direkter Korrespondenz zueinander:

Realität		mathematisches Modell
1)	⟷	1')
2)	⟷	2')

Um die Gesetze der großen Zahl zu verstehen, muß man die beiden Aussagenpaare auseinanderhalten. Die "relative Häufigkeit" R_n in 1'), 2') ist eine Zufallsvariable, aber

---

119) FREUDENTHAL 1972, S. 484
120) HENGST 1971, S. 76
121) bei dem Münzenexperiment wird man im allgemeinen p= 1/2 "ansetzen". Aus Gründen der besseren Klärung lasse ich jedoch im folgenden p unbestimmt.
122) vgl. etwa FELLER 1968 S. 242ff

keine real beobachtete relative Häufigkeit. Ebenso ist p nicht die "wahre" Wahrscheinlichkeit für 'Zahl' wie etwa ROBBINS (1957, S. 354) irrtümlich schreibt. Vielmehr läßt sich an dieser Stelle die Aussage von LERAY (1966, S. 236): "Les mathématiciens n'établissent aucune vérité absolue... mais les conséquences..." bestätigen. Denn das Gesetz der großen Zahl in der Form 2') besagt für den wiederholten Münzenwurf keineswegs, daß die relative Häufigkeit 'gegen 1/2' geht, sondern vielmehr:
wenn wir im Wahrscheinlichkeitsfeld den Parameter p mit 1/2 festsetzen, dann gilt die Aussage 2'). Der Parameter p ist nichts anderes als die Modellwahrscheinlichkeit, die wir uns vorgegeben haben, und Klassiker wie KOLMOGOROFF[123] haben das Gesetz der großen Zahl nie anders interpretiert. Wenn GEIßLER (1962/63, S. 213) schreibt, daß das Gesetz der großen Zahl aussage, daß "statistische Schlüsse und Ergebnisse mit zunehmendem Umfang der untersuchten Massen immer zutreffender werden" oder ENGEL (1973, S. 99), daß auf Grund des schwachen Gesetzes der großen Zahl "die Stabilität der relativen Häufigkeit eines Ereignisses bei einer langen Versuchsreihe mathematisch bewiesen..." sei, so ist dies einfach falsch. Hier wird ganz offensichtlich nicht getrennt zwischen Realität und mathematischem Modell.
SCHRAGE (1973, S. 9) stellt hier klar:

> "Die Gesetze der großen Zahlen machen keinerlei Aussagen über die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses bei einer Versuchsserie. Sie machen lediglich Aussagen über ein Modell, in dem die Beziehungen, aus denen die Gesetze gefolgert werden, Gültigkeit haben..."

Das bedeutet, um es pointiert zu formulieren: Hätten wir bei der Angabe des Wahrscheinlichkeitsfeldes für das Münzwurfexperiment $p(\{\text{"Zahl"}\}) = 1$ und $p(\{\text{"Wappen"}\}) = 0$ gesetzt, so würden die beiden Aussagen 1'), 2') nach wie vor gelten.
SCHRAGE (1973, S. 15) verallgemeinert in seinen Ausführungen:

> "... die Wahrscheinlichkeitsrechnung macht keine Aussagen über die Auskommen von Zufallsexperimenten und

123) vgl. KOLMOGOROFF 1965 (1956^1) S. 238ff, 254

auch nicht über deren Häufigkeiten. Die Anwendbarkeit des Wahrscheinlichkeitsmodells auf Zufallsexperimente ist nicht mathematisch zu begründen."

Vielmehr braucht man für das letztere Anwendungsvorschriften, die den Bezug zwischen mathematischem Modell und Wirklichkeit herstellen, wie etwa das COURNOTsche Prinzip. Erst dann ist man berechtigt, auf Grund des "Gesetzes der großen Zahl" Prognosen über die Realität abzugeben - und oft werden die Prognosen gut sein - oder man kann umgekehrt "... mit Hilfe des Theorems eine empirische relative Häufigkeit... auf eine mathematische Wahrscheinlichkeit unscharf abbilden."[124] Deswegen ist die Aussage von RENYI (1966, S. 35), daß die Beobachtung der relativen Häufigkeiten als ein Messverfahren zur Messung der Wahrscheinlichkeit aufgefaßt werden kann, auch nur so zu verstehen,daß man aus einer Reihe von Daten der Wirklichkeit, z. B. relative Häufigkeiten, ins mathematische Modell übergeht, unter Zugrundelegung dieser Daten mathematische Schlüsse zieht, die mit der Realität verglichen werden. Ein Beispiel soll dies erläutern:[125]

Wirft man mit einer Münze 16-mal und erzielt dabei 12-mal "Zahl", so kann man nicht schließen, daß $p\{(\text{"Zahl"})\} = 12/16$ und damit die Münze "falsch" ist -. Man wird hier vielmehr zwei Hypothesen abwägen, H_0 (Nullhypothese)- der Ausfall ist rein zufällig, d.h. $p = \frac{1}{2}$ H_1 (Gegenhypothese): $p\{(\text{"Zahl"})\} > 1/2$. Nun ist die Wahrscheinlichkeit unter Zugrundelegung der Nullhypothese bei 16 Würfen, mindestens 12-mal "Zahl" zu erzielen, 3,9 %. Das bedeutet: wenn man eine Münze mit obigem Wurfergebnis als gefälscht bezeichnet, ist die Wahrscheinlichkeit laut theoretischer Aussage, sich zu irren, ca. 4 %.

Eine Anwendungsvorschrift im Sinne der obigen Ausführung könnte etwa darin bestehen, daß man alle Schlüsse mit einer kleineren Irrtumswahrscheinlichkeit als 5 % akzeptiert. Man wird sich dann bei diesem Beispiel dafür entscheiden, die Münze als gefälscht zu bezeichnen.

Die Aussagen 1'), 2') werden heute als "schwaches Gesetz der großen Zahl" für Bernoullifolgen bezeichnet. Dieses Gesetz

---

124) HENGST 1971, S. 76

125) vgl. ENGEL 1973, S. 56

ist in anderer Form schon von BERNOULLI bewiesen worden. Wesentlich später, nämlich erst in unserem Jahrhundert, wurde das "starke Gesetz der großen Zahl" entdeckt und bewiesen. Es lautet für unser Standardbeispiel:

Falls für p der Wert 1/2 angenommen wird, gilt

$$P\left\{w{:}R_n\ (w)/n \longrightarrow 1/2\right\} = 0.$$

Alles was zur Aussagekraft dieses Gesetzes über die Realität zu sagen wäre, wurde im Zusammenhang mit dem "schwachen Gesetz" gesagt. Es gibt hier keine prinzipiellen Unterschiede. Die Bezeichnungen "schwach" und "Stark" sind im Sinne einer mathematischen Implikation aufzufassen.

Nicht ganz einheitlich wird in der Literatur die Bedeutung der Gesetze der großen Zahl gesehen. Darüber, daß sie eine "großartige Leistung der Mathematik" darstellen, ist man sich weitgehend einig.

Auch FELLERs Sichtweise (1968, S. 204):

> "Thus the two theorems together describe the fundamental properties of randomness which are inherent in the intuitive notion of probability."

wird weitgehend zugestimmt.

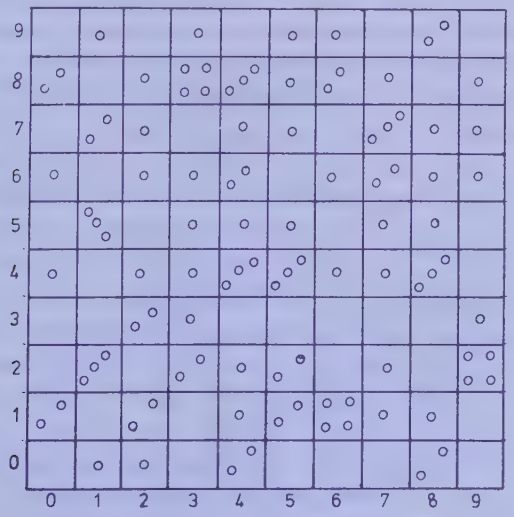
Als eher obsolet gilt indessen die Ansicht, die beiden Theoreme seien das Bindeglied zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, in dem Sinne, daß sie die Berechtigung darstellten, die Wahrscheinlichkeitstheorie zu Prognosen über die Wirklichkeit einzusetzen. Vielmehr gilt nach modernem Verständnis die Tatsache, daß es im mathematischen Modell ableitbare Aussagen, nämlich die beiden Theoreme, gibt, die dem empirischen Gesetz der großen Zahl direkt entsprechen, als Beleg dafür, daß das mathematische Modell des Wahrscheinlichkeitsfeldes gut gewählt ist. Nicht immer ist dies so klar in der Vergangenheit gesehen worden. Vor allem von Anhängern des objektivistischen Standpunktes - allerdings nicht von den anerkannten Klassikern, sondern eher von Lehrbuchautoren - wird auch heute noch des öfteren der Standpunkt vertreten, die Gesetze der großen Zahl seien ein Beweis dafür, daß die Limesdefinition der Wahrscheinlichkeit die adäquate sei.

Tatsächlich aber geht aus den vorgetretenen Überlegungen deutlich hervor, daß das stochastische Arbeiten ohne Explizierung der Beziehung zwischen Wirklichkeit und mathematischem Modell nicht verstanden werden kann. Eine rein empiristische Philosophie erscheint inadäquat.

2.3.5. Monte-Carlo-Simulation

In praktischen Anwendungen hat sich seit ungefähr zwanzig Jahren ein äußerst interessantes Verfahren eingebürgert, die sogenannte Monte-Carlo-Methode[126], die man mit SOBOL (1971, S. 7) beschreiben kann als eine "... numerische Methode zur Lösung mathematischer Probleme mit Hilfe der Modellierung von Zufallsgrößen." Ich will sie an einem Beispiel von ENGEL (1971a, S. 247) erläutern.

Aus 100 Pfund geschmolzenem Glas sollen 100 Flaschen à 1 Pfund hergestellt werden. In der Schmelze sind 100 Steinchen. Jedes davon, das in eine Flasche kommt, macht diese unbrauchbar. Wieviele "gute" Flaschen sind zu erwarten? Mathematisch errechnet sich der Erwartungswert unter Annahme einer Gleichverteilung zu $m = (1 - 1/100)^{100} \cdot 100 = 36{,}6$. Zur Lösung nach der M.C.M. benutzen wir 100 Paare von dekadischen Zufallsziffern und deuten die 100 Flaschen als



126) besser gesagt: Monte-Carlo-Methoden

kartesische Koordinaten. "Würfeln" wir z. B. 23, so deuten wir dies so, daß auf die Flasche im Planquadrat (2,3) ein Steinchen fällt.
Man zählt die Anzahl der freien Kästchen aus und erhält den recht guten Wert 37.
Was wird hier gemacht?
Zunächst einmal steht am Anfang ein Zufallsexperiment, dessen Struktur man nicht bis ins letzte kennt. Man weiß z. B. nicht, nach welchem Zufallsmechanismus die Steinchen sich in der Schmelze verteilen[127]. Von außen wird nun eine Struktur aufgeprägt. Man stellt sich vor, daß die Schmelze in 100 gleiche Teile aufgeteilt ist und deutet das ursprüngliche Zufallsexperiment als 100-fache unabhängige Wiederholung eines einfacheren Zufallsexperiments, das darin besteht "per Zufall" einen der 100 Teile auszuwählen und ihm ein Steinchen zuzuordnen. Dieses "zufällige" Auswählen wird simuliert durch Zufallszahlen, und hier geht die Gleichverteilungshypothese entscheidend ein. Danach wird einfach ausgezählt. Das Verfahren ist mathematisch kaum geschlossen zu rechtfertigen, sondern gründet sich letzten Endes auf die außermathematische Überzeugung, daß Zufallsexperimente durch andere Zufallsexperimente simuliert werden können[128] und entsprechende Parameter wie z. B. Erwartungswerte bei beiden gleich sind. Interessanterweise ist die M.C.M. in den meisten bekannten Lehrbüchern zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht aufgeführt und meines Wissens auch noch nicht mathematisch voll befriedigend durch eine geschlossene Theorie begründet. Der Wert des Verfahrens ist unbestritten, vor allem in komplizierteren Situationen, in denen es nicht mehr möglich ist, wie in unserem Beispiel, auch mit einfachen mathematischen Berechnungsmethoden zum Ziele zu kommen[129]. Vor allem durch die sprunghafte Vorwärtsentwicklung der modernen EDV-Technik zeigt sich immer öfter die Überlegenheit und Effektivität der Monte-Carlo-Methoden. Für einen Computer mit einem Zufallsgenerator ist es nun einmal eine Kleinigkeit, ein Zahlenexperiment tausend-

---

127) Daß dies von Bedeutung sein kann, haben wir bei der Besprechung der BERTRANDschen Paradoxa gesehen.
128) "Simulierbar" ist so gesehen die Bezeichnung des "Praktikers für "isomorph".
129) vgl. SOBOL 1971

mal durchzuspielen.

Es gibt nun zu denken, daß man auf diese Weise nicht nur stochastische, sondern auch ihrem Wesen nach deterministische Problemsituationen bewältigen kann.
Beispielsweise kann man in ein Quadrat mit Seitenlänge 2 den Inkreis einzeichnen und das Quadrat in 1000 oder mehr gleichgroße Karos zerlegen. Wie bei dem vorigen Beispiel wird ein Karo nach dem anderen unter Verwendung von Zufallszahlen ausgewählt. Wir betrachten die relative Häufigkeit der Versuche, bei denen wir die Kreisfläche getroffen haben. Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße ist offensichtlich π. Das heißt: mit der geschilderten Simulation ist es möglich, die Zahl π annähernd zu bestimmen. Nun gibt es natürlich für die Berechnung von Flächeninhalten mathematische Standardalgorithmen, die schneller und genauer zum Ziele führen. Im Falle mehrdimensionaler Integrale ist indessen die Monte-Carlo-Methode oft die einzige Berechnungsmöglichkeit.
Bei diesem Beispiel wird wie bei kaum einem anderen deutlich, daß stochastisches Arbeiten Aufprägen stochastischer Modelle von außen bedeutet. D. W. MÜLLER (1974, S. 167) gebraucht dafür - in etwas anderem Zusammenhang - den Begriff der "distanzierten Rationalität":

> "Damit ist ein Verhalten gegenüber Sachgegebenheiten gemeint, das sich nicht von deren etwaigen oder vermeintlichen Eigengesetzlichkeiten leiten läßt, sondern ihnen mit Entwürfen des Verhaltens in der Form von Modellen, Hypothesen, ...Analogien also sozusagen 'aus der Distanz'... gegenübertritt."

Faßt man zudem deterministische Schemata, wozu mathematische Berechnungsalgorithmen ohne Zweifel gehören, als spezielle Fälle von stochastischen Schemata auf, so wird an dem letzteren Beispiel auch noch in ganz besonderer Weise ein weiterer Gesichtspunkt deutlich, wovon D. W. MÜLLER spricht, nämlich der "...Überschußcharakter der distanzierten Rationalität." Man begegnet der Aufgabe, einen Inhalt zu berechnen, nicht mit einem Algorithmus, wie es eigentlich von der Eigenart der Aufgabe her adäquat erscheint, sondern von außen mit einem

redundanten stochastischen Modell, bei dem nur ein Teilaspekt, nämlich der Erwartungswert, mit dem ursprünglichen Problem in Berührung tritt.

2.3.6. Kombinatorik

Vom Standpunkt der Theorie ist die Kombinatorik sicher kein Bestandteil der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dennoch nimmt sie in den meisten Büchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen breiten Raum ein, wenn man von rein strukturtheoretischen Abhandlungen wie von KAPPOS (1960) absieht.
Dies liegt daran, daß sie es gestattet, aus einfachen Wahrscheinlichkeitsräumen ("Modellen") kompliziertere Wahrscheinlichkeitsräume zu konstruieren. Beispielsweise gehört zum einfachen Münzenwurf der Ereignisraum $\{W, Z\}$. Es erscheint adäquat, dem doppelten Münzenwurf als Ereignisraum das kartesische Produkt $\{W, Z\} \times \{W, Z\}$ zuzuordnen, das aus allen Zweiervariationen mit Wiederholungen von "W" und "Z" besteht. Es erscheint weiter adäquat, bei diesem Beispiel, allen vier Paaren die gleiche Wahrscheinlichkeit 1/4 zuzuordnen, so daß sich für das "gemischte Ereignis" (ohne Rücksicht auf die Reihenfolge) aus Kohärenzgründen die Wahrscheinlichkeit 1/2 ergibt. Warum man dem zusammengesetzten Zufallsexperiment das kartesische Produkt als Ereignisraum und den Elementarereignissen als Wahrscheinlichkeit 1/4 zuordnet, ist mathematisch nicht weiter begründbar. Es ist nichts anderes als eine vernünftig erscheinende Modellhypothese, die sich durch das oftmals ausgeführte tatsächliche Experiment als adäquat oder auch nicht erweist.[130]
Ähnlich lassen sich Permutationen deuten. Zieht man aus einer Urne, die 4 Elemente a, b, c, d, enthält, dreimal hintereinander ein Element (ohne Zurücklegen), so ist das Ergebnis eine (3, 4)-Permutation. Es erscheint vernünftig, dem mehr-

---

130) vw. hierzu auch CLARKE 1971, S. 70 und LANGFORD 1971, S. 72

stufigen Zufallsexperiment den Ereignisraum aller (3, 4)-Permutationen zuzuordnen.
Besonders deutlich wird dieser Zusammenhang zwischen mehrstufigem Zufallsexperiment und Permutation, wenn man ein Baumdiagramm zeichnet.

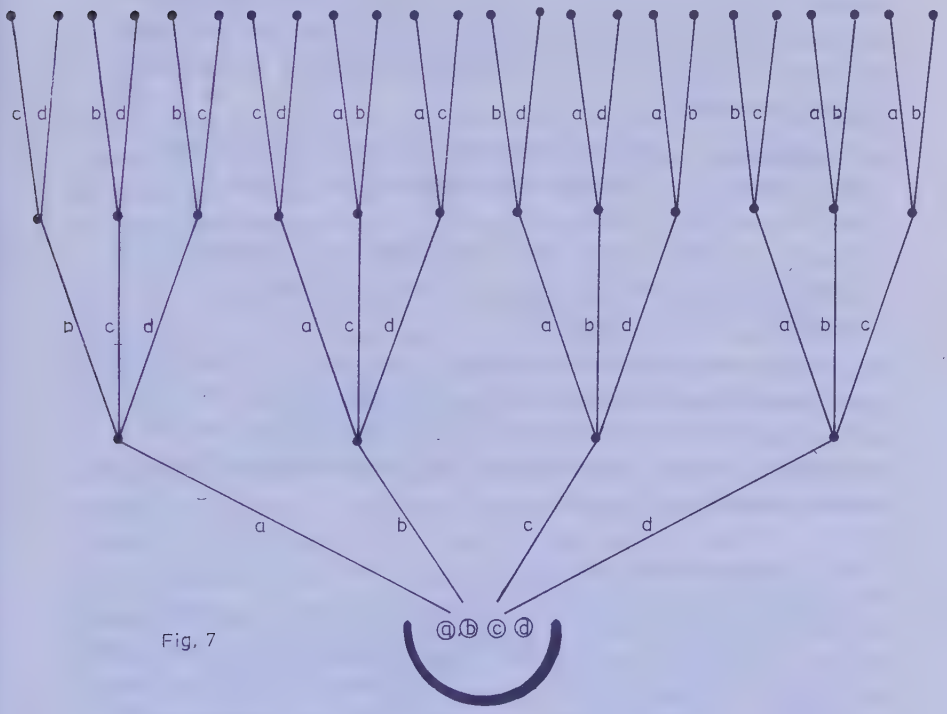


Fig. 7

Das Baumdiagramm ist hier deswegen von fundamentaler Bedeutung, weil in ihm gleichzeitig der mehrstufige Charakter des Experimentes sichtbar wird, als auch, weil durch die Aufzeichnung aller möglichen Wege simultan alle Permutationen erfaßt sind. Man hat somit in einer einzigen graphischen Darstellung sowohl alle Ausgänge des Experimentes als auch seine Struktur.

Verzichtet man in obigem Beispiel auf die Bedingung, daß die Reihenfolge eine Rolle spielt, kommt man zum Begriff der Kombination ohne Wiederholung.
Sind die Elemente der Urne nicht unterscheidbar, wird man zum Begriff der Kombination mit Wiederholungen geführt.
Die Formeln, mit denen man die Zahl der möglichen Variationen, Kombinationen etc. errechnen kann, sind von elementarer Natur und in fast jedem Buch der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu finden. Sie lassen sich beweisen mit zwei fast selbstverständlichen, aber dennoch höchst leistungsfähigen Grundideen:[131]

1. Produktregel: (Kombinatorisches Zählen) Führen n Wege von A nach B und m Wege von B nach C, so führen n.m Gesamtwege von A nach C.
2. Quotientenregel: Zerfällt eine Menge von n Elementen in paarweise disjunkte Klassen mit je m Elementen, so ist die Zahl der Klassen n/m.

Die Produktregel findet ihr Analogon in der "Pfadregel" von S. 53"die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten des Pfades". Dies zeigt ebenfalls, daß die Kombinatorik für die Wahrscheinlichkeitstheorie unentbehrlich ist.

2.3.7. Statistische Verfahren

Ein statistisches Beispiel haben wir schon auf Seite 67 diskutiert. Allgemein besteht die Grundidee der Statistik darin, aus einer Grundgesamtheit (Urne) eine oder mehrere Stichproben zu entnehmen und aus dem Verhalten der Stichproben Rückschlüsse zu ziehen auf die Grundgesamtheit - oder aber zwei Stichproben auf Unterschiede zu prüfen. Daß alle diese Schlüsse umso genauer - eigentlich müßte man "glaubwürdiger" sagen - werden, je größer die Stichproben sind, ist eine auf Grund von Beobachtungen in der Realität (wiederholter Münzenwurf, Hochrechnungen bei Bundestagswahlen etc.)

---

131) vw. z. B. GOLDBERG 1964

intuitiv einleuchtende Tatsache, die ein mathematisches Korrelat besitzt, nämlich den 1933 von GLIWENKO bewiesenen Satz:[132]

> Es sei $S_n(x)$ eine empirische Verteilungsfunktion einer einfachen Stichprobe vom Umfang n, die einer Gesamtheit entnommen wurde, in der das Merkmal X die Verteilungsfunktion F(x) hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Folge $S_n(x)$ gleichmäßig bezüglich x ($-\infty < x < \infty$) gegen F(x) konvergiert, ist gleich 1.

Dabei meint man mit empirischer Verteilungsfunktion folgendes: Sei in der Grundgesamtheit eine Zufallsvariable (= Merkmal wie Intelligenz, Größe etc.) nach F(x) verteilt. Dann ist $S_n(x)$ die Zahl der beobachteten Stichprobenwerte, die kleiner als x sind, - dividiert durch n.

Mit den einleitenden Sätzen sind schon die Hauptaufgaben der Statistik angesprochen, die man im wesentlichen bezeichnen kann als: 1) Hypothesen testen
2) Parameter schätzen (einschließlich Angabe von Konfidenzintervallen)

Zu beiden Bereichen sollen elementare Beispiele diskutiert werden, aus denen jedoch die grundsätzlichen Verfahrensweisen ebenso klar ersichtlich werden wie aus komplizierten.

ad 1) (Hypothesentest) Es soll an Hand einer Stichprobe von 3000 Geburten, darunter 1578 Knaben, geprüft werden, ob die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt die gleiche ist wie für eine Mädchengeburt[133]. Das heißt in statistischem Jargon: es soll die Hypothese $H_o : p_k = p_m = 1/2$ getestet werden.

1. Schritt: Aufstellen der Hypothese $p_k = 1/2$ (H_o)

2. Schritt: Einsetzen des Wahrscheinlichkeitsformalismus auf der Basis der Hypothese. Es wird die Wahrscheinlichkeit α dafür berechnet, daß unter der Voraussetzung $p_k = 1/2$ sich eine Zahl von Knabengeburten ergibt, die größer oder gleich 1578 ist. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich unter Zugrundelegung einer Binomalverteilung zu weniger als 1 %.

---

132) vgl. FISZ 1965, S. 327

133) nach KREYSZIG 1968, S. 205

3. Schritt: Ausschaltungsvorgang
Aufgrund der sich ergebenden Wahrscheinlichkeit muß man sich entscheiden. Im allgemeinen wird die Grenze in statistischen Tests der Psychologie bei $\alpha = 1\ \%$ oder $5\ \%$ gesetzt. Dies aber ist nur eine praktische Konvention und nicht mehr.
In diesem Fall wird man also die Hypothese H_o: $p = 1/2$ ablehnen und die Hypothese (=Modellannahme=) modifizieren in H_1: $p > 1/2$.

Die Eigentümlichkeit dieses Verfahrens bringt es mit sich, daß man zweierlei Arten von Fehlern begehen kann. Dadurch, daß die Wahrscheinlichkeit für mehr als 1577 Knabengeburten unter Zugrundelegung von $p = 1/2$ sehr klein ist, ist dieses Ereignis trotzdem nicht unmöglich. Mit anderen Worten: es kann sein, daß H_o richtig ist, und wir nur eine sehr ungünstige Stichprobe gewählt haben. Wir weisen dann die richtige Hypothese H_o als falsch zurück und begehen damit einen Fehler erster Art. Ein Fehler zweiter Art würde bedeuten, daß man die Hypothese annimmt, obwohl sie falsch ist. Es liegt auf der Hand, daß man die Irrtumswahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Fehler erster Art zu begehen, auch nicht zu niedrig festsetzen kann, weil sonst die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler zweiter Art zu begehen, unter Umständen zu groß wird. Insofern ist die übliche Festsetzung von α als $5\ \%$ oder $1\ \%$ eigentlich mehr als eine bloße Konvention. Welches Signifikanzniveau, ob $5\ \%$, $1\ \%$ oder u. U. noch kleinere Zahlen man wählt, wird immer vom Einzelfall abhängen, d. h. von der Tragweite der aus statistischen Schlüssen erfolgenden Entscheidungen.

Wir wollen noch einmal diskutieren, was bei obigem Beispiel eigentlich gemacht wurde. Es standen zwei gegensätzliche Hypothesen im Raum, H_o und H_1. Wir haben keineswegs eine der beiden Aussagen verifiziert oder falsifiziert, wie man dies von anderen mathematischen Gebieten her gewöhnt ist. Vielmehr haben wir die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet,

daß sich auf der Basis von H_o zufällig ein solches Ergebnis ergibt, wie wir es vorliegen haben. Diese Wahrscheinlichkeit war so klein, daß wir auf Grund des Cournotschen Prinzips H_o abzulehnen beschlossen haben. Im subjektivistischen Jargon hätten wir auch sagen können: 'Die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Hypothese H_o ist so klein, daß H_o unglaubwürdig ist'.

Bei den Objektivisten ist dies verpönt, da Hypothesen als singuläre Ereignisse anzusehen sind, oder wenn Objektivisten Hypothesen doch Wahrscheinlichkeiten zuordnen, nach MATALON (1969, S. 530) folgendermaßen vorgehen:

> "Selon eux [die Frequentisten] le sens de la proposition 'il est peu probable que mon adversaire triche' reviendrait à: "lorsque je me suis trouvé en face de joueurs présentant les mêmes caractéristiques que mon adversaire d'aujourdhui, j'ai eu plus souvent raison que tort en affirmant qu'ils ne trichaient pas."

Es ist jedoch keine Seltenheit, daß viele Statistiker, die den subjektivistischen Standpunkt ablehnen, ja sich als Objektivisten fühlen, dennoch Hypothesen mit Wahrscheinlichkeiten belegen[134], was JEFFREYS (1938, S. 300) etwas boshaft kommentiert:

> "... in practice no statistician ever uses a frequency definition, but that all use the notion of degree of reasonable belief, usually without ever noticing, that they are using it..."

Die Statistiker der NEYMAN/PEARSONschen-Schule vermeiden es durch einen Kunstgriff, von der "Wahrscheinlichkeit einer Hypothese" sprechen zu müssen, indem sie einen Unterschied machen zwischen "probability" und "likelihood". Das erstere wird als Wahrscheinlichkeit verstanden. Das zweite, das vorkommt etwa in der Form: "... the likelihood of the composite hypotheses"[135] oder "... alternatives to H_o which became relatively more and more likely than H_o..."[136] hat nicht die Bedeutung 'Wahrscheinlichkeit', sondern ist eine rein technische Bezeichnung.

Diese Auffassung gibt nach DE FINETTIs Ansicht dem NEYMAN/PEARSONschen Aufbau einen sehr künstlichen und formalistischen

---

134) z. B. PAWLOWSKI 1971, S. 526: "... da die aufgestellte Hypothese eine große Wahrscheinlichkeit hat..."

135) NEYMAN 1967 (1929), S. 59 (Unterstreichung von mir)

Anstrich. An anderer Stelle schreibt DE FINETTI (1972, S. 172):

> "To accept a hypothesis or an estimate is not to attribute to it any kind of probability or plausibility; [in der Neyman/Pearsonschen Schule] such acceptance is a mechanical act, based not on an judgement of its actual validity but on the frequent validity of the method from which it was derived. This is the criterion followed by the man who buys a suit of brand A that he considers defective instead of buying a suit of brand B that he considers non-defective, because he knows from statistics that A has a smaller percentage of defective suits than B. For him, the directive comparison of the two suits has no value at all, since it concerns only individual cases."

PRATT gar stellt in Bezug auf obigen Punkt ironisch fest:[137]

> "We can invent something else to say, but nothing else to think."

ad 2) (Parameter schätzen) Die Behandlung des Beispieles zu 1. entschied nur die Frage, ob für die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt 1/2 oder ein Wert größer als 1/2 anzusetzen ist, beantwortet jedoch nicht die Frage nach der Größe für die relative Häufigkeit in der Grundgesamtheit bzw. nach der Größe von p. Die relative Häufigkeit $\tilde{p}$ = 1578/3000 in der betrachteten Stichprobe von 3000 Geburten ist ein naheliegender Schätzwert für p. Nun interessiert man sich aber in der Mathematik beim Schätzen von Parametern ja meist für die größtmöglichen Abweichungen, d. h. man fragt nach einem Umgebungsintervall des Schätzwertes, in dem der wahre Wert liegen muß. Eine solche Fragestellung ist sicherlich für dieses Beispiel nicht adäquat, da sich bei jedem Wert von p aus dem Bereich (0,1) per Zufall ein solches Ergebnis von 1578 wie in dem Beispiel einstellen kann.

Wenn überhaupt, kann man nur fragen:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt p zwischen $\tilde{p} + \varepsilon$ und $\tilde{p} - \varepsilon$. Für die Statistik hat sich die folgende Fragestellung, die genau umgekehrt dazu ist, bewährt.
Wir geben eine solche Wahrscheinlichkeit γ vor, die sogenannte Konfidenzzahl und bestimmen ein solches Intervall, das

---

136) PEARSON: in: NEYMAN 1966, S. 10 (Unterstreichung von mir)
137) PRATT, J. W., 1961 zitiert nach DE FINETTI 1972, S. 175

sogenannte "Konfidenzintervall"[138] (oder auch "Vertrauensbereich" genannt), daß mit Wahrscheinlichkeit γ der Parameter p im Intervall liegt.
In unserem Beispiel[139] findet man durch Anwendung der Binomialverteilung für p das Konfidenzintervall I = [0,502 , 0,550] bei Zugrundelegung einer Konfidenzzahl γ = 99 %. Das bedeutet: aus der Stichprobe läßt sich mit 99 % Sicherheit ablesen, daß die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt zwischen 0,502 und 0,550 liegt. Diese Aussage läßt sich noch so interpretieren, daß man in 99 von 100 aller Fälle, in denen man eine entsprechende Stichprobe zieht und den Schätzwert sowie ein Konfidenzintervall bestimmt, erwarten darf, daß unser Schätzwert p in diesem Konfidenzintervall liegt. Es liegt auf der Hand, daß die Konfidenzintervalle umso größer werden, je kleiner man die Konfidenzzahl wählt.

Die Verwandtschaft zwischen den beiden wichtigsten statistischen Fragestellungen 1. und 2. ist offensichtlich. Die Irrtumswahrscheinlichkeit α entspricht der Konfidenzzahl γ .
Im Grunde kann jetzt nachträglich, nachdem ein Konfidenzintervall angegeben ist, auch wieder die Fragestellung von 1. angewandt werden, indem nämlich die beiden Hypothesen H_o : p liegt in I und H_1: p liegt nicht in I, gegeneinander getestet werden.
Aus diesem Grunde meint PAWLOWSKI (1971, S. 231) zu Recht:[140]

> "In den letzten zwanzig Jahren ist man immer mehr geneigt, diese beiden Gebiete [1. und 2.] des statistischen Schlusses als eine Einheit aufzufassen. Beide haben die Aufgabe, die beste Entscheidung aus der Menge der möglichen Urteile über die Verteilung (bzw. Parameter) der beobachteten zufälligen Veränderlichen zu treffen."

Bei beiden Verfahren zeigt sich ganz deutlich, daß der Mensch sich keineswegs auf die Beschreibung zufälliger Phänomene - beschränkt, sondern daß eher im HILBERTschen Sinne der "menschliche Geist selbständig" mit Hilfe solcher Modellkonstruktionen wie "Hypothesen, Fehler 1. und 2. Art, Konfidenzintervalle" der stochastischen Umwelt gegenübertritt und sie statistisch gestaltet.[141]

---

138) diese Begriffe hat NEYMAN eingeführt
139) Rechnung vw. KREYSZIG 1968, S. 198
140) PAWLOWSKI 1971, S. 231-232
141) vgl. HILBERTzitat auf S. 8 Z. 5f

3. Modell und Wirklichkeit

Zum Abschluß unserer Skizzierung der 'Struktur' der Stochastik sollen nun die wissenschaftstheoretischen Grundlagenfragen, mit denen wir uns schon in Abschnitt 2,2 beschäftigt haben, nochmals diskutiert werden. Auf den letzten Seiten wurde öfters der Begriff "Modell" gebraucht, um stochastisches Arbeiten zu beschreiben. Dies ist kein Zufall, sondern hängt eigentümlich mit dem Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zusammen. FREUDENTHAL (1961, S. 79) stellt bezeichnenderweise fest: "... no scientist is a modelminded as is the statistician " und in den meisten modernen Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird ähnliches konstatiert, wenngleich die Beziehungen zwischen mathematischem Modell und Realität selten so ausführlich erörtert werden wie bei HINDERER (1972, S. III), der den FREUDENTHALschen Standpunkt teilt, gleichzeitig aber auf die methodologische Problematik aufmerksam macht:

> "Wohl in keiner mathematischen Disziplin treten bei der Konstruktion von Modellen zur Anwendung der Theorie auf außermathematische Fragestellungen solche Schwierigkeiten auf wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung."

Ich will im folgenden versuchen, die beiden Zitate am Beispiel der Stochastik zu deuten und zu konkretisieren, da mir der Modellbegriff unabdingbar scheint, um das Verhältnis zwischen Wirklichkeit und Wahrscheinlichkeitstheorie zu beschreiben.

Wir haben auf der einen Seite die stochastischen Erscheinungen unserer Umwelt und andererseits die Wahrscheinlichkeitstheorie, die für sich in Anspruch nimmt, diese Erscheinungen adäquat zu erfassen. Nun ist es eine heute schon übliche Sicht, daß eine mathematische Theorie die Wirklichkeit nicht vollständig darstellen kann.[142] Vielmehr können, nach OTTE, Theorien "... nur lokal die Realität darstellen etwa in dem Sinne, in dem der Kreis und seine Tangente nur lokal übereinstimmen..."[143] Naturgesetze sind demnach zu interpretieren als Naturhypothesen

---

142) vgl. OTTE 1974, S. 94, NOLFI 1956, S. 59, THOM 1973, S. 205

143) OTTE 1974, S. 94. Ähnliches meint auch D. W. MÜLLER 1974, S. 167, wenn er von "approximativem Wissen" spricht oder THOM 1973, S. 205, wenn er von der "Tangentialebene an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit" spricht.

im Rahmen von Modellen. Dabei kann man das Modell mit FREY (1961, S. 90) als etwas ansehen, "... mit dem wir anstelle einer nicht fassbaren Wirklichkeit operieren." Das heißt genauer, daß man sich auf Grund heuristischer Überlegungen unter Verwendung empirischer Vorerfahrungen Modellvorstellungen macht, diese in den Ausgangspunkt des mathematischen Schließens bringt und die daraus folgenden Prognosen in der Realität überprüft. Unter Umständen ist man gezwungen, die ursprünglichen allzu groben Modellvorstellungen im Sinne einer Integration in neue, feinere zu modifizieren, wofür insbesondere die Atomphysik prägnante Beispiele bietet. Was oft vergessen wird: Modelle werden nicht einfach aus der scheinbaren Eigengesetzlichkeit der Realität abstrahiert. Im Gegenteil, wenn OTTE (1974, S. 94) von "... zu modellierenden Gegebenheiten..." spricht, oder D. W. MÜLLER von "distanzierter Rationalität"[144] oder WOITSCHACH (1971, S. 111) davon, daß "der Mensch seine Umwelt gestaltet, indem er ihr seinen Ordnungswillen aufzwingt", so wird deutlich, daß Modelle der Wirklichkeit aufgeprägt werden[145]. Deswegen sind Aussagen innerhalb des Modells nicht an sich Aussagen über die Realität, sondern werden es erst durch Interpretationen. EINSTEIN hat dies einmal sehr schön ausgedrückt.[146]

> "Insoweit die mathematischen Sätze sich auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie unsicher und insoweit sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit... der Fortschritt der axiomatischen Methode besteht in der scharfen Trennung der logischen Form und des realistischen und anschaulichen Inhalts. Die Axiome sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes...."

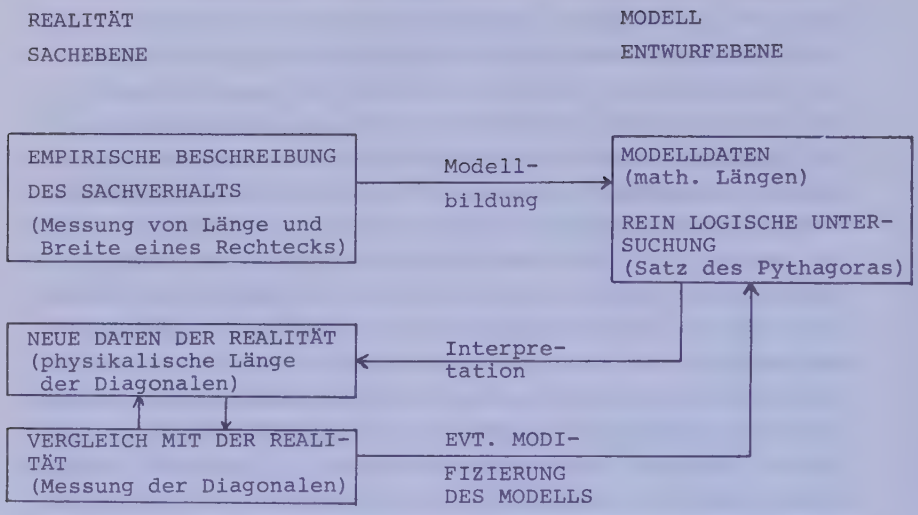
Wohl am deutlichsten lassen sich diese allgemeinen Erörterungen am konkreten Beispiel der Geometrie veranschaulichen. Das folgende Diagramm basiert auf einem Beispiel von HINDERER (1972, S. 2). Ob man dabei "Realität" und "Modell" gegenüberstellt oder wie D. W. MÜLLER "Sachebene" und "Entwurfebene", ist weitgehend eine Frage der Terminologie.

---

144) vgl. S. 80

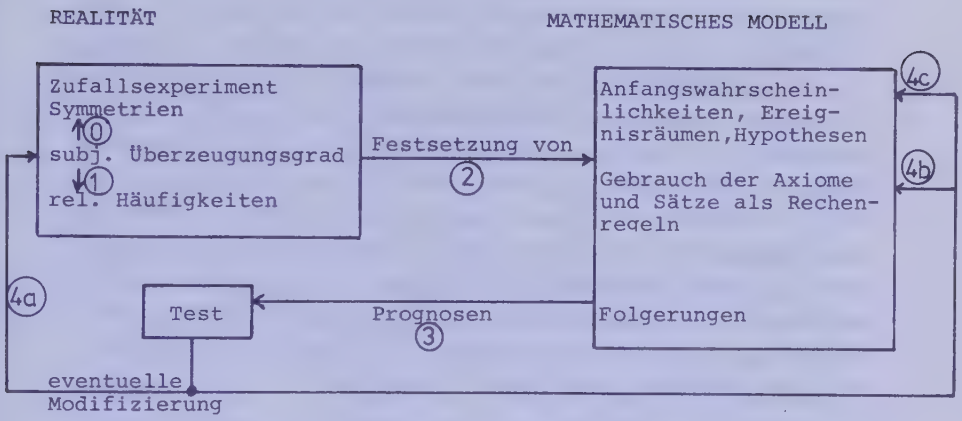
145) daß ich hier -ausnahmsweise- Autoren im Zusammenhang zitiere, die man aus Konsistenzgründen normalerweise nicht in einem Atemzug nennen, hat seinen Grund darin, daß dieser Punkt von allgemeinem wissenschaftstheoretischem Interesse und obschon der Stochastik eigentümlich, anderen Disziplinen nicht fremd ist.

146) EINSTEIN zit. nach FREUDENTHAL 1973/74, S. 46



Nun ist die Tatsache, daß die Geometrie nicht zur äußeren Realität, sondern vielmehr zum Gedanklichen gehört, mit dem wir die Wirklichkeit prägen, zwar für sich recht interessant. Sich dies bewußt zu machen, verhilft jedoch nicht unmittelbar dazu, daß ein Schüler seine Geometrie nun effizienter und besser anwendet. Der Grund dafür ist einleuchtend: es gibt im allgemeinen keine Interpretationsschwierigkeiten. Die Interpretation eines "mathematischen Punktes" als "physikalischen Punkt" wird von jedem als geradezu natürlich und zwingend angesehen. Anders sieht es aus, wenn man das Schema der letzten Seiten auf den Fall der Stochastik zu übertragen versucht.

eine analoge Graphik könnte so aussehen:



Vor einer Diskussion dieses Schemas will ich es an einem Beispiel erläutern:
In den USA ist ein Gesellschaftsspiel, "Chuck-a-luck" genannt[147], weit verbreitet. Der Spieler setzt dabei einen Groschen und darf drei Würfel werfen. Bei einer '6' bekommt er seinen Einsatz zurück und zusätzlich für jede '6' einen Extragroschen.

Die meisten Spieler rechnen sich aus, daß sie im Vorteil sind, und haben dafür folgendes Erklärungsmodell parat: Entweder auf Grund von Symmetrieüberlegungen (0) oder auf Grund von Vorerfahrungen (1) geben sie mit Recht an (2), daß P (6 beim ersten Wurf) = P (6 beim zweiten Wurf) = P (6 beim dritten Wurf) sei. D. h. sie übertragen die äußere figurale Würfelsymmetrie auf die Annahme einer Gleichverteilung und der Modellwahrscheinlichkeit 1/6. Sie schließen nun innerhalb des Modells, daß dann ihre Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine 6 zu werfen, gleich 1/6 + 1/6 + 1/6 sei. Auf Grund dessen geben sie eine Prognose über zu erwartende relative

147) nach WALLIS/ROBERTS 1966, S. 274

Häufigkeiten und Gewinne ab (3), indem sie sich sagen: "in ungefähr der Hälfte aller Fälle gewinne ich meinen eingesetzten Groschen zurück, schließe also auf lange Sicht mit einer ausgeglichenen Bilanz ab. Darüber hinaus habe ich aber die Chance, mehrere Sechsen auf einmal zu werfen..." Gehen sie auf Grund dieser Prognose die angebotene Wette ein, d. h. sie testen ihr Modell, werden sie feststellen, daß sie auf lange Sicht verlieren. Daraufhin werden Sie ihr subjektives Erwartungsgefühl für den Einzelversuch oder aber gleich ihr Modell modifizieren (4), sei es, daß sie andere Anfangswahrscheinlichkeiten festsetzen (4c) [148] oder aber die Additionsregel in ihrer adäquaten Form verwenden. Tun sie das letztere, werden sie zum Schluß kommen, daß der Erwartungswert negativ ist und die neue Prognose abgeben (3), daß sie bei diesem Spiel auf die Dauer verlieren.

Problematisch bei dem Schema scheint vor allem, daß auf der linken Seite die Begriffe der "relativen Häufigkeit" und der "Symmetrie" erscheinen. Hier wird oft eingewandt, daß man ja schon eine Modellvorstellung habe, wenn man von Symmetrie spricht, oder daß man ja schon dann, wenn man bei Zufallsserien relative Häufigkeiten registriert, der Realität "Zahlen aufprägt", d. h. also schon auf der Seite des mathematischen Modells ist. Diese scheinbare Inkonsistenz löst sich indessen auf, wenn man die Beziehung zwischen Realität und Mathematik als einen stufenweisen Schichtenaufbau sieht. Sicherlich kann man schon die Maßzahlen der deskriptiven Statistik als Modelldaten sehen. Auf einem höheren Niveau jedoch wird man sie als der Realität zugehörig sehen und von der alten greifbaren und sichtbaren Wirklichkeit zu einer 'neuen Realität' übergehen, in der die relativen Häufigkeiten als reale Fakten auftauchen. Ähnlich verhält es sich mit der Symmetrie. Vielleicht sollten zur Beziehung zwischen relativen Häufigkeiten und subjektivem Überzeugungsgrad noch einige klärende Worte gesagt werden.

Es ist beileibe nicht so, daß die Stabilität von relativen

---

148) Vor allem Kinder stehen sowieso oft auf dem Standpunkt, daß die '6' seltener vorkommt als andere Zahlen, d. h. $p(\{6\}) < 1/6$.

Häufigkeiten für einen Subjektivisten keinen Sinn hätte oder daß vom subjektivistischen Standpunkt Wahrscheinlichkeiten "a posteriori" nicht verwendet würden. Vielmehr wird eine kohärent denkende Person ihr subjektives Erwartungsgefühl nach einer langen Serie von Versuchen durchaus korrigieren und so ganz naturgemäß als Anfangswahrscheinlichkeit, so wie die Objektivisten, relative Häufigkeiten verwenden und ihr Erwartungsgefühl auch auf die Ergebnisse ausgeführter Versuchsserien stützen. Ein historisches Beispiel mag dies an Hand des letzten Diagramms erläutern:
Zu Zeiten des Chevalier DE MÉRÉ war es erfahrungsgemäß (relative Häufigkeiten!) bekannt, daß es vorteilhafter war, auf mindestens eine Sechs bei vier Würfelwürfen zu tippen als auf das Gegenereignis. Es lag nahe, auf Grund der "Dreierregel", wie sie FREUDENTHAL[149] bezeichnet, zu schließen (=Arbeit im mathematischen Modell=), es müßte auch vorteilhaft sein auf mindestens einen Sechserpasch in 24 Würfen mit zwei Würfeln zu wetten (=Prognosen!=). In den Spielsalons (Tests!) merkte man, daß das nicht stimmen konnte, und wie wir wissen, kamen FERMAT und PASCAL durch Modifizieren des inadäquaten Modells ("Dreierregel") zu einem besseren Modell, in dem Additionsregel und Multiplikationsregel enthalten waren und damit zu adäquaten Prognosen. In diesem Sinne soll die Aussage des Schemas verstanden werden, daß subjektive Überzeugungsgrade und relative Häufigkeiten, die untereinander zusammenhängen, vom menschlichen Geiste konstruierte Abbilder in Form von Wahrscheinlichkeiten im mathematischen Modell besitzen. Nicht immer ist die Tatsache, daß Wahrscheinlichkeit nur ein Modelldatum ist, aber kein "an sich Seiendes" so klar gesehen worden. Dies dürfte auch ein Grund dafür sein, daß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung schon so viele abstruse Dinge geschrieben wurden. Ein Beispiel

---

149) nach FREUDENTHAL 1973/74, S. 538f: "...wenn ich auf ein Ereignis aus sechs in vier Würfen wetten kann, so wird daraus sechsunddreißig in vierundzwanzig Würfen, weil ja 6:4 = 36:24 ist."

von 1903 möge hier genügen:[150]

> "... noch mehr; so fremdartig es erscheinen mag, die Wahrscheinlichkeitsrechnung würde ihre Existenz einbüßen, sie hätte keine Daseinsberechtigung mehr, wenn die objektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses einen völlig bestimmten Wert hätte. Welchen Sinn kann man in der Tat der Aussage geben: Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von 5 beim Würfeln mit einem bestimmten Würfel sei beständig 1/6? Doch keinen anderen als: in 6 Würfen erscheint 5 einmal, in 12 zweimal, in 600 hundertmal usw. Nicht genug an dem, vom Beginne des Spielens an müßte sich 5 in jeder Serie von 6 Würfen immer an derselben Stelle ereignen; denn sonst gäbe es bei einer entsprechend ausgeführten Unterteilung der 600 Würfe sechsgliedrige Gruppen ohne 5. Wenn sich aber 5 mit dieser absoluten Regelmäßigkeit zutrüge, dann wäre nichts Wahrscheinliches und Unwahrscheinliches mehr in seinem Eintreffen, man wäre in Gewissheit darüber, daß es sich bei dem so und sovielten Wurfe zutrage; dies wäre ein Naturgesetz."

Alle diese Folgerungen wären in der Tat richtig, wenn man als Prämisse voraussetzen würde: ... die relative Häufigkeit für 5 sei beständig 1/6. Dadurch, daß der Verfasser somit objektive Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit gleichsetzt, verwischt er die Grenzen zwischen "Sachebene und Entwurfsebene" und kommt so zu diesen abstrusen Aussagen. Man sieht an diesem Beispiel, daß die bewußte Trennung zwischen Realität und Modell von hohem Erklärungswert sein kann. Nimmt man es ernst mit dieser Trennung, dann verbietet es sich, selbst im Elementarunterricht Wahrscheinlichkeit in der v. MISESschen Form oder der LAPLACEschen Form zu erklären. Streng genommen darf man dann bei Zufallsexperimenten auch nicht mehr fragen: Was wird geschehen? , sondern eher "Was ist zu erwarten?" oder "Was erwartest DU?"

Überhaupt kann, wie ich versucht habe, nachzuweisen, allgemein stochastisches Arbeiten, sei es bei statistischen Hypothesenprüfungen, bei Monte-Carlo-Methoden, ja selbst bei vergleichsweise harmlosen kombinatorischen Überlegungen ohne die Bewußtseinsmachung dieser Trennung nicht verstanden werden. Noch ein letzter Punkt verdient detaillierter herausgear-

---

150) P. MANSIONS, Sur la portée objective du calcul des propabilites. Bull. de l'academie de Belgique 1903, S. 1256, zitiert nach CZUBER, E., 1914, S. 153

beitet zu werden, nämlich die Beziehung zwischen "abstrakter Modellbildung" oder "Modellbildung im großen" und "konkreter Modellbildung" oder "Modellbildung im kleinen".

Die abstrakte Modellbildung war das Aufstellen der allgemeinen Theorie, die im wesentlichen im KOLMOGOROFFschen Axiomensystem trotz einiger neuerer Verallgemeinerungen für Probleme der theoretischen Physik ihren vorläufigen Abschluß gefunden hat und relativ unproblematisch ist. Dies ist aber erst die Grobstruktur oder der allgemeine Rahmen. Bei jedem einzelnen Anwendungsproblem muß dieses abstrakte Modell verfeinert und konkretisiert werden, indem spezielle Ereignisräume und Wahrscheinlichkeiten festgelegt werden. In dieser konkreten zweiten Modellbildung liegen auch die Hauptschwierigkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wofür einerseits der Grundlagenstreit der Objektivisten und Subjektivisten, andererseits die vielen Paradoxa in der Stochastik Zeugnis ablegen, die wir schon an anderer Stelle diskutiert haben. Hierin fällt auch das Verifizierungsproblem von mathematischen Lösungen, das nirgendwo so schwierig wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Nehmen wir beispielsweise das DE MÉRÉsche Teilungsproblem:[151]

> A und B haben eine Reihe von Spielen mit gleicher Gewinnwahrscheinlichkeit vereinbart. Wer zuerst fünf Spiele gewonnen hat, bekommt den vollständigen Einsatz. Nachdem A vier Spiele und B drei Spiele gewonnen haben, wird das Spiel aus irgendwelchen Gründen abgebrochen. Wie sollen die Einsätze verteilt werden?

Hier gibt es verschiedene Lösungen:

1) Verteilung 1:1 (jeder erhält seinen Einsatz zurück)
2) 4:3 (Verhältnis der gewonnen Spiele)
3) (5-3):(5-4)
4) 3:1 nach PASCAL, der sich überlegte, wie die Spiele hätten weiter gehen können

Im allgemeinen wird PASCALs Lösung als "die richtige" bezeichnet und die anderen als "falsch". Streng genommen sind jedoch alle Lösungen richtig, wenn man die jeweiligen Begründungsvoraussetzungen zugrundelegt. PASCALs Lösung als

---

151) nach FREUDENTHAL 1973/74, S. 529

die "richtige" zu bezeichnen, dazu hat man nur dann ein Recht, wenn die Spieler den vorzeitigen Abbruch einkalkuliert hätten und für diesen Fall eine Entscheidung nach Abwägen der zu diesem Zeitpunkt bestehenden Gewinnchancen vorgesehen hätten. Ähnlich, wenngleich komplizierter, liegt der Fall beim BERTRANDschen Paradoxon sowie beim (unbeabsichtigten) Paradoxon von LIPSCHUTZ.[152]

Besonders deutlich kommt diese Modellbildung im kleinen in einer Arbeit von SCHRAGE (1973) zum Ausdruck. SCHRAGE geht dabei von der schon als klassisch zu bezeichnenden Idee[153], Urnen zur Simulation von Zufallsexperimenten zu verwenden, aus, und verwendet dabei die Tatsache, daß ein mathematisches Wahrscheinlichkeitsfeld $M = (E, \mathcal{A}, p)$ ja stets durch ein Urnenmodell zu konkretisieren ist. Umgekehrt kann man jeder Urne mit bestimmten Eigenschaften ein isomorphes mathematisches Wahrscheinlichkeitsfeld zuordnen. Es gilt:[154]

> "Alle Sätze, die sich für das Wahrscheinlichkeitsfeld herleiten lassen, gelten natürlich auch bei entsprechender Interpretation für ein zugehöriges Urnenmodell. Aussagen über Wahrscheinlichkeiten sind dabei im Urnenmodell exakte Aussagen über relative Häufigkeiten..." (SCHRAGE 1973, S. 11)

Damit ist es entbehrlich geworden, einem Zufallsexperiment einen Ereignisraum, eine σ- algebra und darüber hinaus sogar eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zuzuordnen. Stattdessen wird dem betreffenden Zufallsexperiment eine Urne zugeordnet, aus deren Zusammensetzung sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von selbst ergibt.

> "... wir haben bisher überhaupt nicht von der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses bei einem Zufallsexperiment gesprochen, sondern wir haben diesen Begriff lediglich am Modell benutzt. Nun ist es naheliegend und auch üblich, als Wahrscheinlichkeit eines solchen zufälligen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit zu bezeichnen, die dem entsprechenden Ereignis des zugeordneten Modells zukommt. Es hat daher keinen Sinn von der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses zu sprechen; diese hängt vielmehr ab von dem Modell, aufgrund dessen man seine Prognosen bezüglich des Zufallsexperiments macht und das auf vielfache Art gewählt werden kann." 155)

Solche Urnen können zusammengesetzt werden zu neuen Urnen,

---

152) vgl. LIPSCHUTZ 1968, S. 54; SCHRAGE 1971, S. 309-312
153) vw. POLYA 1963, S. 96 154) streng genommen geht das begrifflich nur für höchstens abzählbare Ereignisräume
155) SCHRAGE 1973, S. 14

in der Sprechweise von FREUDENTHAL (1963) "Hyperurnen" genannt, die den kartesischen Produkten von Ereignisräumen entsprechen. Man kann mit Folgen von Urnen, wie etwa POLYA zeigt, sogar (Markoff)-prozesse wie das Wetterverhalten simulieren[156], und man kann der Isomorphie von Zufallsexperimenten eine anschauliche Bedeutung derart geben, daß man Zufallsexperimente als "isomorph" ansieht, wenn sie durch isomorphe Urnenmodelle simuliert werden können.
Des weiteren ist das Urnenmodell unentbehrlich, wenn es daraum geht, solche Begriffe, wie "zufällige Auswahl" zu erfassen. Es kann dafür, wie FREUDENTHAL (1961, S. 80) bemerkt, prinzipiell keine Definitionsvorschrift im Sinne eines Algorithmus geben.
Die einzige, allerdings höchst anschauliche Methode, besteht darin, dem Begriff der "zufälligen Auswahl" durch das Urnenmodell anschauliche Bedeutung zu verleihen.

Mit Hilfe dieser grundsätzlichen Idee der gegenseitigen Zuordnung von Zufallsexperimenten und Urnen ist es auch leicht möglich, das BERTRANDsche Paradoxon von S. 25 aufzuklären. Die grundsätzliche Frage dabei lautet nämlich: Was heißt es, eine Sehne zufällig durchzulegen? Hier sind verschiedene Zufallsmechanismen möglich, die man alle durch Urnen simulieren kann:

Urne I enthält beispielsweise 1000 Zettel mit Werten zwischen +1 und -1, die gleichverteilt sein sollen.

Urne II 1000 Zettel, auf denen ebenso viele Winkel zwischen 0° und 180° stehen (ebenfalls gleichverteilt).

Urne III 1000 Zettel, auf denen Kreispunkte mit ihren beiden Koordinaten gekennzeichnet sind. Dabei gehören diese Punkte zu 1000 flächengleichen Teilen, die die Scheibe im Sinne einer Klasseneinteilung zerlegen.

---

156) MARKOFFprozesse nicht deswegen, weil das Wetterverhalten so ist, sondern weil man ihm diese Struktur aufprägt, indem man postuliert, daß die Wahrscheinlichkeit für gutes Wetter nach einem Sonnentag konstant ist und höher als nach einem Regentag. vw. POLYA 1963, S. 96ff

Je nachdem, welche Urne man zur Simulation benützt, erhält man andere Eregebnisse für die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses. Mathematisch unvorgebildete Leute pflegen oft bei Darstellungen des BERTRANDschen Paradoxons einzuwerfen, daß es doch möglich sein müsse, "experimentell" nachzuprüfen, welche der drei Lösungen nun richtig sei. Vielleicht ist die Simulation mit den drei beschriebenen Urnenmodellen die beste Möglichkeit, ihnen dabei klarzumachen, daß es bei der Beantwortung dieser Frage auf die experimentelle Anordnung ankommt.

Fassen wir zusammen:
Der Begriff der Wahrscheinlichkeit hat nur Sinn im Zusammenhang mit einem mathematischen Modell. Als "Bedeutung" ("Meaning") steht dabei im Hintergrund das vorwissenschaftliche intuitive Erwartungsgefühl oder aber relative Häufigkeiten. Stochastisches Arbeiten kann nicht verstanden werden ohne die ständige Standortorientierung, ob man noch in der "Sachebene" oder schon in der "Entwurfsebene" ist.
Hierbei kann das Urnenmodell eine entscheidende Rolle spielen, weil es abstrakten Modellbegriffen, wie "zufälliger Auswahl" eine unmittelbare anschauliche Bedeutung gibt, ganzheitlicher Natur ist in dem Sinne, daß durch die Zuordnung einer Urne zu einem Zufallsexperiment implizit das ganze Wahrscheinlichkeitsfeld mitzugeordnet wird und damit auch das Schema von S. 83 eine einfachere Struktur erhält, nämlich:
Zufallsexperiment ⟶ Urne ⟶ Prognose ⟶ Simulation (=Test=) ⟶ evtl. Modifizierung durch Veränderung des Urneninhalts.

4. Fundamentale Ideen, Probleme und Verfahren der Stochastik

Nach diesen oftmals etwas langwierigen Vorbereitungen wenden wir uns der zentralen Frage nach den fundamentalen Ideen der Stochastik im BRUNERschen Sinne zu. BRUNER gibt uns in seinem Werk leider keine Definition davon, was er unter "fundamental ideas" versteht, ebensowenig wie etwa ENGEL (1966a, S. 159), der diesen Begriff auch verwendet. Man kann sich nur an Hand der Beispiele, die BRUNER (1960, S. 24ff) gibt, eine gewisse Vorstellung davon machen. Danach sind "fundamental ideas" zu verstehen als Ordnungsprinzipien, die der menschliche Geist geschaffen hat, um historische Gegebenheiten oder naturwissenschaftliche Phänomene im Sinne eines größtmöglichen Erklärungswertes zu strukturieren. Sie sind reine Gedankenkonstrukte, die der Mensch der Umwelt aufprägt.

Die Beziehungen zwischen "Modell" und einer so verstandenen "Idee" sind offensichtlich. Sicherlich sind "Modellvorstellungen", wenn sie dazu verhelfen, wichtige Umweltphänomene zu erklären, "Ideen" im BRUNERschen Sinne. Idealtypisch hierfür ist etwa die Idee des BOHRSCHEN Atommodells. Auch wenn die neueren quantenmechanischen Befunde weit darüber hinausgegangen sind, ist sein erkenntnistheoretischer Wert auf einer bestimmten Wissensstufe sicherlich enorm. Umgekehrt dürfte man auf Grund unseres heutigen Verständnisses von der Beziehung zwischen Theorien und Realität wohl auch die meisten "Ideen" der Natur- und Sozialwissenschaften, die man intuitiv als "fundamental" ansieht, als Modellkonstruktionen ansehen dürfen, die sich bislang bewährt haben. Statt "fundamentale Ideen" könnte man somit auch genausogut in moderner Terminologie "fundamentale Erklärungsmodelle" sagen, sofern man "erklären" nicht allzu eng sieht, sondern auch den beschreibenden und ordnenden Aspekt darin sieht.

Es ist sicherlich nicht unverfänglich, eine Liste fundamentaler Ideen der Stochastik aufzustellen, da diese immer abhängig vom Standort des Betreffenden ist und leicht zu Kontroversen mit anderen Standorten führt. Die Liste eines reinen Fachwissen-

schaftlers dürfte anders aussehen als die eines Entwicklungspsychologen, der die Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffes untersucht, und diese dürfte wieder anders aussehen als die eines Pädagogen, der vielleicht die Aufgabe des Stochastikunterrichts vorwiegend darin sieht, dem Schüler zu einem "kontinuierlichen Übergang von den magischen und mythischen Vorstellungsweisen zu den rational-kausalen Erklärungen"[157] zu verhelfen. Zudem dürfte auch noch eine Rolle spielen, ob man auf einem mehr subjektivistischen oder einem mehr objektivistischen Standpunkt steht, - ob man der Ansicht ist, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion eine Mengenfunktion ist oder ob sie Aussagen über Propositionen und ihre Beziehungen machen soll.

Diese Ausführungen zeigen schon, daß man eigentlich nicht von den "fundamentalen Ideen" der Stochastik sprechen kann. Es kann jeder von seiner Intention her nur eine Liste vorschlagen, wobei er sich um größtmögliche Abstimmung mit dem Fach bemühen sollte. Deswegen soll hier noch einmal ganz - deutlich gesagt werden: meine Intention ist fachdidaktisch bestimmt. Dabei liegt meine Absicht nicht darin, eine Liste fundamentaler Ideen aufzustellen, mit denen die Wahrscheinlichkeitsrechnung für den Unterricht möglichst gut deduktiv zu gliedern ist. Die Schwierigkeiten liegen, wie ich durch meine Ausführungen zeigen wollte, klar im Bereich der Anwendungen. Deswegen betrachte ich es mit DINGES (1973, S. 1) als "vornehmstes Ziel eines Unterrichts in Stochastik, daß die Schüler den mit dem Anspruch der Wissenschaftlichkeit im täglichen Leben auf sie zukommenden Aussagen statistischen Charakters sicherer begegnen lernen." Denn dies ist doch wohl ein Stück von dem, was BRUNER Bildung nennt. Konsequenterweise werde ich beim Aufstellen meiner Liste einen pragmatischen Standpunkt einnehmen und unter "fundamentalen Ideen" solche Ideen verstehen, die dem Individuum auf jeder Stufe seiner Entwicklung möglichst gute Erklärungsmodelle liefern und die sich auf den verschiedenen kognitiven Stufen nicht strukturell, sondern (im weitesten Sinne des Wortes) nur vom sprachlichen und durch den Grad der Elaboriertheit her

---

157) v. HENTIG 1969, S. 35

unterscheiden. Durch diese Strukturgleichheit ist die "intellektuelle Ehrlichkeit", von der BRUNER (1960, S. 44) spricht und die "Kontinuität" gewahrt, womit wesentliche Bedürfnisse des Faches abgedeckt sind.

Jedoch soll auf diesen Punkt vor allem noch im III. Kapitel im Rahmen der Betrachtungen zur Curriculumspirale eingegangen werden. Auch die Frage, welchen fachdidaktischen Nutzen eine Liste fundamentaler Ideen haben könnte, soll erst am Schlusse angesprochen werden.

Zunächst einmal soll meine nun folgende Liste einfach eine Modellkonstruktion darstellen, um fachdidaktisch weiter arbeiten zu können. Ob das Modell adäquat ist, muß sich noch herausstellen.

0. Sachebene und Entwurfebene- distanzierte Rationalität

Als eine der STochastik in ganz besonderem Maße zugrundeliegende Leitidee ist das Verhältnis von Modell und Wirklichkeit im Sinne einer "distanzierten Rationalität" zu sehen. Um geometrisch zu arbeiten, braucht man diese Sichtweise im allgemeinen nicht. Um stochastisch zu arbeiten, ist diese Sichtweise unbedingt nötig und zwar nicht primär aus wissenschaftstheoretischem Interesse, sondern zur Erklärung der stochastischen Verfahrensweisen, die im wesentlichen darin bestehen, einer stochastischen Umwelt stochastische Modelle aufzuprägen.
Diese Leitidee durchzieht alle folgenden Ideen, weshalb ich sie an den Anfang stelle.

(1) Normierung unseres Erwartungsgefühls

Als erste fundamentale Idee der Stochastik sehe ich es an, unser intuitives Erwartungsgefühl, das sich in der Alltagssprache ausdrückt durch Formulierungen wie: "ich glaube schon", "ziemlich sicher" etc., in der Weise zu normieren, daß unmöglichen Ereignissen die Wahrscheinlichkeit O zugeordnet wird, sicheren Ereignissen die Wahrscheinlichkeit 1, so daß die Relation "ist wahrscheinlicher als" übergeht in die Relation " $\geq$ " zwischen reellen Zahlen.
Es steckt hierin eine Vergröberung der komplexen Umwelt, indem diese in ihrer Multidimensionalität abgebildet wird auf das eindimensionale reelle Einheitsintervall, und genau dies ist fundamental. Denn nur durch geschickte Vergröberung wird die Umwelt mathematischen Werkzeugen zugänglich.
Schon an dieser ersten Idee wird hier der in der Leitidee aufgewiesene Gesichtspunkt deutlich, daß der Mensch der Realität Wahrscheinlichkeiten in Form von mathematischen Gebilden (Zahlen!) aufprägt.
Um Mißverständnissen vorzubeugen: streng genommen, wenn man auch die Prozesse mitsieht, die zu solchen Zahlen (Anfangswahrscheinlichkeiten nach LAPLACE, Folgewahrscheinlichkeiten) führen, steckt in dieser ersten Idee schon die gesamte Wahrscheinlichkeitstheorie. An dieser Stelle ist aber nur der Gedanke gemeint, das individuelle Erwartungsgefühl so wie

andere zunächst unquantifizierte Begriffe wie die Temperatur zu skalieren.

(2) Das Wahrscheinlichkeitsfeld

Ebenso fundamental erscheint mir die im Grunde erst durch KOLMOGOROFF in konsequenter Weise durchgeführte Idee, Zufallsexperimenten einen Ereignisraum von beobachtbaren Ausfällen und dem Feld der beobachtbaren Ereignisse einen σ-Mengenkörper zuzuordnen, - fundamental nicht deswegen, weil es damit, zusammen mit einer additiven, normierten Maßfunktion - gelang, die Wahrscheinlichkeitsrechnung befriedigend zu axiomatisieren und damit das 6. HILBERTsche Problem zu lösen, sondern vielmehr deswegen, weil hier durch die Aufprägung eines mathematischen Modells das Zufallsexperiment überschaubar geworden ist. Im Grunde können auch Baumdiagramme, deren Wichtigkeit unbestritten ist, als strukturierte Ereignismengen in ikonisierter Form angesehen werden. In den Betrachtungen zur Kombinatorik werde ich darauf zurückkommen.

Auch erkenntnistheoretisch hat sich diese zweite Idee niedergeschlagen in dem von HARTWIG (1956) formulierten Ätialprinzip: "gleiche allgemeine Ursachen - gleiche Menge von möglichen Wirkungen mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten." durch das er das klassische Kausalprinzip: "gleiche Ursache - gleiche Wirkung" ersetzte.[158]

(3) Disjunktive Verknüpfung von Ereignissen - Additionsregel

Es ist ein allgemeiner Zug der Mathematik, aus einfachen Modellen komplizierte aufzubauen oder komplizierte auf einfachere zurückzuführen. So auch in der Stochastik! Ist es

158) Auch von einem anderen Gesichtspunkt, der eigentlich erst Gegenstand des II. Kapitels ist und hier nur kurz erwähnt wird wegen seiner Wichtigkeit, scheint mir diese II. Idee fundamental zu sein. In den entwicklungspsychologischen Untersuchungen zur Entwicklung des Zufallsbegriffs (vw. Kap. II) wird immer wieder festgestellt, daß Kinder, wie auch Erwachsene einem zu eng verstandenen Determinismus verhaftet sind, der sich so ausdrückt, daß sie an den zwingenden Ausfall eines Experimentes glauben, anstatt die Gesamtheit aller möglichen Ausfälle im Auge zu haben.

noch möglich, auf Grund der ersten beiden Ideen nach subjektivem Dafürhalten Anfangswahrscheinlichkeiten festzusetzen, so geht dies nicht mehr ohne weitere bei komplizierteren Ereignisfeldern, wie etwa dem des dreifachen Würfelwurfs. Als vermittelnde Idee fungiert hier die Additionsregel, die es gestattet, innerhalb des mathematischen Modells aus einfachen Anfangswahrscheinlichkeiten neue Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Auch wenn sie im Alltag nicht ganz die Rolle spielt wie andere Ideen, so hat sie doch auch in vielen stochastischen Situationen echte Erschließungsfunktion. Als besonders prägnantes Beispiel möchte ich nur das schon erwähnte Glücksspiel "Chuck-a-luck" nennen. In der subjektivistischen Theorie ist diese (3) Idee das Band, das die subjektiven Erwartungsgefühle "zügelt" und eine "Kohärenz der Erwartung" herbeiführt.

(4) Verknüpfung von Zufallsexperimenten - Unabhängigkeit

Der schon in der (3) Idee sichtbare Aspekt der Mathematik überhaupt und der Wahrscheinlichkeitsrechnung im besonderen, Modelle zusammenzusetzen und zu zerlegen, tritt überdeutlich zum Vorschein, wenn Zufallsexperimente selber verknüpft werden und Wahrscheinlichkeiten zu diesen 'mehrstufigen' Zufallsexperimenten über die Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Fundamental hierbei vor allem der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(A \mid H)$, die bei praktischen Anwendungen meist als Wahrscheinlichkeit für A, wenn H schon eingetreten ist, gedeutet wird. Mit anderen Worten: sie ist ein Maß dafür, wie sich unser Erwartungsgefühl beim Eintreffen neuer Informationen modifiziert. Ein vielleicht noch fundamentalerer Begriff, wenn man die Alltagserfahrungen zugrundelegt, ist der mathematisch zwar auf die bedingte Wahrscheinlichkeit zurückführbare, aber dennoch einer eigenen Betrachtung wert scheinende Begriff der Unabhängigkeit. Es erscheint mir fundamental, Zufallsexperimente, die offenbar keinen physikalischen Kausalzusammenhang aufweisen, als stochastisch unabhängig anzusehen. Tatsächlich erweist sich wohl am deutlichsten an dieser Idee des unab-

hängigen Wiederholenkönnens eines Zufallsexperiments die Diskrepanz zwischen der mathematischen Behandlung eines theoretischen Modells und seiner Anwendung auf die Realität. Einerseits ist das mathematische Modell der Unabhängigkeit, das sich in der Produktregel niederschlägt, ja höchst einfach zu beherrschen. Andererseits zeigt sich im Alltag, daß viele, sogar naturwissenschaftlich geschulte Menschen, die über weit kompliziertere mathematische Modelle verfügen, offensichtlich wie unter einem Zwang nicht fähig sind, die Idee der Unabhängigkeit in konsequenter Weise auf Alltagssituationen zu übertragen.

(5) Gleichverteilung und Symmetrie

Die ersten vier Ideen treffen noch keine Angaben über Methoden, um Anfangswahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Es ist nun eine heuristische Grundidee, vorhandene Symmetrien in Problemsituationen auszunützen. Dabei heißt Symmetrie etwa beim Würfelexperiment, daß keine Seite gegenüber der anderen ausgezeichnet ist. Man nimmt dies als Berechtigung, die Gleichverteilung anzunehmen und damit die LAPLACEsche Regel, auf deren Anwendung hinzuweisen wohl entbehrlich ist. Ist die Gleichverteilung zunächst noch nicht gegeben, so ist es doch oft möglich, durch Verfeinerung des Ereignisraumes und zugehörige Symmetriebetrachtungen auf eine Gleichverteilung zu kommen. Es muß hier betont werden, daß die Idee der Gleichverteilung, die man von der Idee der statistischen Symmetrie ja nicht trennen kann, abgesehen vom formalen Beschreibungsaspekt, nicht zur mathematischen Theorie gehört, sondern vielmehr in das heuristische Vorfeld wahrscheinlichkeitstheoretischer Problemsituationen. Mit aus diesem Grunde ist es auch unmöglich zu definieren, was 'statistische Symmetrie' heißt. Es sind zwar schon Prinzipien aufgestellt worden, etwa: physikalische Symmetrie impliziert statistische Symmetrie. Aber zu allen diesen Prinzipien lassen sich Beispiele angeben, an denen sich ihre Unzulänglichkeit erweist, z. B. zu obigem durch das nachstehende Zufallsexperiment (Fig. 10), bei dem Kugeln über Fallrinnen in Urnen rollen. Hier ist die Annahme einer Gleichverteilung sicher vernünftig, obwohl keine physi-

kalische Symmetrie vorliegt. Das Prinzip des unzureichenden Grundes würde zwar alle Fälle erfassen, ist aber inhaltlich zu blass formuliert und bietet, vor allem bei unendlichen Ereignismengen Raum für Paradoxien und Widersprüche. Es scheint so, als ob die Idee der Symmetrie und der Gleichverteilung nicht intentional, sondern nur durch Verarbeitung von vielfältigem Beispielmaterial auf die Dauer zu erfassen ist. Und davon gibt es sehr vieles. In allen möglichen Situationen, wenn z. B. der Arzt zu Analysezwecken Blutproben entnimmt, beim klassischen Begegnungsproblem[160] etc. ist die Gleichverteilung die nächstliegende Arbeitshypothese, die erst nachträglich u. U. auf ihre Adäquatheit getestet wird. In den Anfängen der analytischen Statistik - ich meine die BAYESsche Theorie - spielte sie schon eine hervorragende Rolle insoweit, als die in der BAYESschen Formel auftretende a-priori-Verteilung ja stets als gleichverteilt angesehen wurde, solange kein Hindernisgrund vorlag.

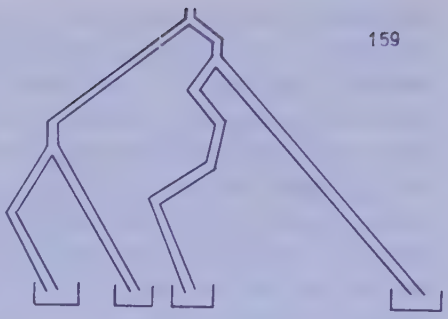


Fig. 10

Vielleicht eines der schönsten Beispiele für die Anwendungen der Gleichverteilung handelt von einem Studenten, der jeden Morgen die jeweils erste (von zwei Straßenbahnlinien, die in gleichem Abstand fuhren) Straßenbahnlinie nahm, wobei die eine zur Uni führte, die andere zu seiner Freundin. Er betrachtete es als "Wink des Schicksals", daß er in 9 von 10 Fällen bei seiner Freundin landete.
Hier hätte die Idee der Gleichverteilung bzw. der LAPLACEschen Regel dazu beitragen können - wenn die Geschichte wahr ist - ein Stück magisches Weltbild zu rationalisieren.

(6) Kombinatorische Ideen

Wie schon im Kapitel über Kombinatorik ausgeführt, erscheint

159) nach FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1967, S. 482 ff abgewandelte Figur
160) vgl. FREUDENTHAL 1973/74, S. 482

es mir unzureichend, diese nur als Servicewissenschaft der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzusehen. Die kombinatorischen Grundoperationen sind nicht einfach Standardalgorithmen, um Ereignisräume zu komplexen Zufallsexperimenten zu berechnen, sondern geben, vor allem in ikonischer Darstellung als Baumdiagramme, direkten Einblick in die innere Struktur von Zufallsexperimenten und sind Ausdruck dafür, wie sich aufeinanderfolgende Zufallsexperimente zu einem komplexeren verbinden. Die große Leistung der Kombinatorik besteht darin, daß sie komplizierte Zufallsexperimente nach ihrer Zusammensetzung aus einfacheren in bestimmte Standardtypen klassifiziert und so dem tätigen Mathematiker zur numerischen Behandlung Standardmodelle liefert. Zu diesen Standardmodellen führen die Produktregel und die Quotientenregel, wovon vor allem die Produktregel ("kombinatorisches Zählen") fundamental erscheint.

(7) Urnenmodell und Simulation

Die Gründe, warum das Urnenmodell so fundamental ist, wurden schon ausführlich diskutiert,so daß ich mich hier kurz fassen kann. Es sind im wesentlichen drei:

1) Das Urnenmodell gestattet einen ganzheitlich-anschaulichen Zugang von der Realität zum mathematischen Modell
2) Begriffe wie "zufällige Auswahl", "Unabhängigkeit", "Gleichverteilung" bekommen im Urnenmodell eine anschauliche und prägnante Bedeutung zugleich
3) Mit Urnen läßt sich jedes Zufallsexperiment simulieren.

Die Idee der Simulation ist deswegen so fundamental, weil

1) hieran wohl am deutlichsten sichtbar wird, wie der Mensch der Umwelt stochastische Modelle aufprägt
2) weil die Möglichkeit der Simulation auf das allerdeutlichste zeigt, daß bei oftmaliger Wiederholung von Zufallsexperimenten sich eine innerstochastische Gesetzmäßigkeit herausstellt. (Prinzip der großen Zahl!)

Es soll hier allerdings noch am Rande erwähnt werden, daß ich mich bei der Aufführung des Urnenmodells als fundamen-

taler Idee weniger von der Mathematik als eher von fachdidaktischen Erwägungen leiten ließ.

(8) Die Idee der Zufallsvariablen

Sicherlich ist es keine Übertreibung, zu sagen, daß erst der Begriff der Zufallsvariablen und des darauf aufgebauten begrifflichen Apparates die Wahrscheinlichkeitsrechnung über das Stadium der mathematischen Erfassung von Glücksspielen wesentlich hinausgebracht hat und die mannigfachen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der angewandten Statistik ermöglicht hat. Es gibt zu denken, wie schwer sich die Mathematiker vergangener Jahrhunderte, die den Begriff der Zufallsvariablen in ihrer expliziten Form nicht kannten, bei solchen Problemen wie dem Petersburger Paradoxon taten oder daß BERNOULLI 20 Jahre für sein schwaches Gesetz der großen Zahl brauchte[161], beides Probleme, die mit der heutigen Sprache von Zufallsvariablen in wenigen Zeilen zu behandeln sind.
Die Idee der Zufallsvariablen war jedoch nicht nur für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung fundamental, auch im täglichen Leben spielen Zufallsvariable überall , sei es bei Glücksspielen, bei Warteschlangen oder bei physikalischen Vorgängen eine für die Erklärung tragende Rolle. Wohl auf Grund der vielfältigen Erfahrungen, die man, wenn auch oft unbewußt, mit Zufallsvariablen im täglichen Leben macht, kann man der Ansicht zustimmen, daß die "Vorstellung von Größen, die wir unter Beteiligung des Zufalls in die Hände bekommen, noch vor der Vorstellung von Zufallsexperimenten intuitiv rangiert."[162]
Als Erklärungsmodell spielt der Begriff der Zufallsvariablen vor allem von drei Aspekten her eine wichtige Rolle: von der Verteilung einer Zufallsgröße, von der Verknüpfung von Zufallsgrößen zu neuen und vom Erwartungswert einer Zufallsgröße her.
Über Verteilungen ist das meiste gesagt worden. Fundamental als Erklärungsmodelle sind vor allem die Gleichverteilung, die wegen ihrer besonderen Bedeutung als eigene Idee aufgeführt wurde und die Normalverteilung (zentraler Grenzwert-

161) nach MENGES 1968, S. 11
162) DINGES 1972, S. 17

satz!) Die wichtigsten Charakteristiken einer Verteilungsfunktion sind der Erwartungswert zum einen, die Standardabweichung zum anderen. Beide sind fundamental für den Menschen unserer Tage, wenn er statistischen Aussagen sicher und kritisch gegenübertreten will. Es kann auf die Dauer nicht genügen, wie es in unseren Medien ständig geschieht, die Menschen nur mit Mittelwerten zu füttern, ohne auch ein Maß für die Schwankung anzugeben. Der Begriff des Erwartungswertes ermöglicht es im Grunde, mathematische, deterministische Methoden auf zufällige Vorgänge anzuwenden. In der Wahrscheinlichkeitstheorie selber hat er sich von solcher Bedeutsamkeit erwiesen, daß man oft statt der Wahrscheinlichkeit p(A) eines Ereignisses A den Erwartungswert der Indikatorfunktion χ_A auf A betrachtet, der seinem Wert nach gleich p(A) ist. Er wird intuitiv meist gedeutet als arithmetischer Durchschnitt der Werte einer Zufallsvariablen, wenn das zugrundeliegende Zufallsexperiment unter "identischen Bedingungen" oft wiederholt wird. Präzisiert wird dieses intuitive Verständnis durch die Gesetze der großen Zahl.

(9) Aussagen zur "Großen Zahl"

Wir haben im Abschnitt über die Gesetze der großen Zahl schon festgestellt, daß man zwischen den mathematischen Gesetzen der großen Zahl und einem empirischen Gesetz der großen Zahl sorgfältig unterscheiden muß. Beide scheinen mir von fundamentalem Erklärungswert zu sein. Das empirische Gesetz beschreibt die Tatsache, daß sich bei wiederholten Zufallsexperimenten auf lange Sicht eine Stabilität der relativen Häufigkeit einstellt. D. h. trotz der Zufälligkeit des Einzelversuchs stellt sich eine empirische Gesetzmäßigkeit heraus, die WAGEMAN (1950, S. 22) recht prägnant als "individuelle Freiheit bei kollektivem Zwang" bezeichnet und die mathematisch nicht erklärbar ist.
Das Gesetz der großen Zahl hat einen ganz anderen Stellenwert. Erinnern wir uns: im Aufbau des mathematischen Modells d. h. der KOLMOGOROFFschen Wahrscheinlichkeitsrechnung kommen wesentliche Begriffe wie Unabhängigkeit eigentlich erst sehr

spät, ebenso wie der Begriff der relativen Häufigkeit, von dem doch jeder intuitiv annimmt, daß er irgendetwas mit Wahrscheinlicheit zu tun hat. Andererseits scheinen die Begriffe, die im Axiomensystem vorkommen, auf den ersten Blick gar nichts mit Wahrscheinlichkeit zu tun zu haben, wie wir sie intuitiv verstehen, ja es wirkt sogar recht künstlich, wenn wir dem Ereignis "eine gerade Zahl zu werfen" die Menge 2, 4, 6 beim Würfel zuordnen.

Somit kann man feststellen: in den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind "Sachebene" und "Entwurfebene" relativ weit auseinander und entwickeln sich unabhängig. Erst bei den Aussagen zur großen Zahl ist die Nahtstelle, wo beide Ebenen auf das innigste miteinander in Berührung treten. Man kann somit das Gesetz der großen Zahl deuten als "fundamentale Erklärung a posteriori" dafür, daß das Wahrscheinlichkeitsmodell gut gewählt war.

(10) Die Idee der Stichprobenentnahme

Am Beispiel des Regenfalls auf Pflastersteine von S. 64 ist noch eine letzte fundamentale Idee aufweisbar, nämlich die Idee der Stichprobenentnahme. Um die auf ein Areal gefallene Regenmenge zu bestimmen, genügt es, eine Stichprobe z. B. in Form eines Pflastersteines auszuwählen und an Hand von Feststellungen an der Stichprobe für das gesamte Areal eine statistische Prognose über die gefallene Regenmenge zu treffen. Dies ist fundamental nicht nur in den Situationen, die man immer als Paradebeispiele anführt, nämlich die Beispiele aus psychologischen Untersuchen, aus der medizinischen Labordiagnostik oder der industriellen Qualitätskontrolle. Vielmehr stützt sich unser ganzes Wissen und unser ganzes Urteilen auf Stichproben. Vorurteile sind nichts anderes als Urteile auf Grund nichtrepräsentativer Stichproben. Da es Denken, Urteile und Folgerungen nur auf der Basis von Stichproben gibt, kommt es nun darauf an, die Menschen dazu zu bringen, solche Urteile vorsichtig und kritisch zu fällen. Jeder, so wie der berufliche Statistiker, sollte Stichprobenerhebung und damit die Folgerungen daraus als grobe Modelle ansehen, die

Realität zu klären, und sollte sich möglichst in jedem Einzelfall klarmachen, daß seine Schlüsse statistischer Art sind, weiterhin, welche Konsequenzen diese Schlüsse haben und welcher Schaden bei einer Fehlentscheidung auftreten kann, und auch wie leicht wir durch Zufall eine nichtrepräsentative Stichprobe erwischen können.

Schlussbemerkungen:

Es ist sicherlich möglich, weitere fundamentale Ideen und Verfahrensweisen im Bereich der Stochastik aufzuweisen. Wenn man die mathematischen Ansprüche höher setzt, wäre hierbei insbesondere an MARKOFFsche Prozesse oder Zufallsfunktionen zu denken. Es war jedoch von vornherein die Absicht, nur solche fundamentalen Ideen zusammenzustellen, die mit Hilfe elementarster Mathematik zu verstehen sind. Denn "fundamental" im Sinne BRUNERs heißt ja "größtmöglicher Erklärungswert vom Kindergarten bis zur Universität" und soll das umschließen, was zu einem gebildeten Menschen gehört.

II. Entwicklungs- und lernpsychologische Randbedingungen für ein Stochastikcurriculum

Einleitung und Übersicht

Wir haben im letzten Kapitel gemäß dem BRUNERschen Prinzip der Strukturorientierung fundamentale Ideen der Stochastik herausgearbeitet. Der Akzent lag dabei wesentlich auf der mathematischen Sachanalyse, die wir ohne Berücksichtigung psychologischer Aspekte vorgenommen haben. Wir interessierten uns vor allem dafür, wie Wahrscheinlichkeitstheoretiker mit stochastischen Modellen arbeiten und welche dieser Modelle von besonderem Erklärungswert sind.

Überhaupt nicht eingegangen sind wir bisher auf die Frage, wie der Mensch im Laufe seiner kognitiven Entwicklung in stochastischen Situationen reagiert. Diese Frage ist - bzgl. aller Entwicklungsstadien - aus verschiedenen Gründen von großer Wichtigkeit.

Zum einen ist es eine unverzichtbare Forderung an jeden Unterricht, daß er im großen und ganzen stetig verläuft, d. h. konkret, daß er an "... der vorliegenden kognitiven Struktur des Lernenden anzusetzen" hat.[1] Speziell für einen frühen Stochastikunterricht im Primarbereich ist es somit nötig, zu wissen, was 6 - 7-jährige schon an Kenntnissen über Zufall und Wahrscheinlichkeit mitbringen. Dabei geht es jedoch sicher nicht nur um statische Wissensinhalte. Auf Grund der entwicklungspsychologischen Forschungen scheint gesichert, daß sich das Denken von Kindern in grundsätzlicher Hinsicht vom Denken Erwachsener unterscheidet.[2] Dies deutet auch BRUNER an, wenn er fordert, "... die Denkweise des heranwachsenden Kindes zu respektieren."[3] Ein detailliertes Studium dieser "Denkweise" und ihrer Entwicklung erscheint somit für die Konstruktion von konkreten Unterrichtsangeboten unerlässlich, da ja die Schule die jeweiligen Möglichkeiten jedes intellektuellen Stadiums optimal

1) WITTMANN 1974 S. 66
2) etwa, was den Gebrauch von Denkstrukturen wie Syllogismen u. ä. betrifft. vgl. OERTER 1971 S. 199ff
3) vgl. BRUNER 1970 S. 61

nützen sollte. Daß ich dabei die Forschungen PIAGETs so gründlich behandeln werde, liegt an verschiedenen Gründen. Auch wenn man die Äußerungen FLAVELLs (1963, S. 412) der Begeisterung eines Piagetanhängers zugute hält, muß man doch anerkennen, daß die Rolle PIAGETs in der Enticklungspsychologie so dominant ist, daß man an seinen Ergebnissen nicht vorbeigehen kann. PIAGET hat bisher als einziger eine geschlossene entwicklungspsychologische Theorie zu allen wesentlichen kognitiven Bereichen des Individuums gegeben - auch für die Entwicklung des stochastischen Denkens. Da PIAGETs Beiträge hierzu bislang nicht in Übersetzungen vorliegen und im deutschen Sprachraum nur wenige bekannt sind, soll auf sie besonders ausführlich eingegangen werden. Dies ist von dem hier bezogenen didaktischen Standpunkt aus umsomehr gerechtfertigt, als in den PIAGETschen Experimenten eine Fülle didaktischer Ideen steckt.

Die Gliederung dieses II. Kapitels ergibt sich fast zwangsläufig. Nachdem wir im I. Kapitel eine Liste fundamentaler Ideen aufgestellt haben, wollen wir uns nun den folgenden Fragen zuwenden, die jedoch nicht isoliert abehandelt werden sollen.

1. Inwieweit ist bei Kindern der verschiedenen Altersstufen von 5 - 13 Jahren von ihrem intellektuellen Rüstzeug her eine Lernbereitschaft ("readiness") für unsere fundamentale Idee gegeben?
2. Wie gut sind diese fundamentalen Ideen beim Individuum ausgeprägt und wie stellt sich ihre Entwicklung dar?
3. Welche Rolle spielen diese fundamentalen Ideen im Leben des Individuums?

Die letzte Frage scheint etwas aus dem Rahmen zu fallen, da sie auch das Verhalten Erwachsener in stochastischen Situationen umfaßt, das (aus technischen Gründen) im letzten Abschnitt des nun folgenden Kapitels behandelt wird. Dieser Abschnitt ist jedoch durch verschiedene Gründe fachdidaktisch gerechtfertigt:

a. Das große mathematik-didaktische Problem überhaupt ist nach LENNE (1966, S. 289) das didaktische Quantitätsproblem, das notwendigerweise Stoffbeschränkungen

und Stoffauswahl für die Schule impliziert. Um bei der Auswahl mathematischer Stoffe Prioritäten setzen zu können, muß man aber wissen, welchen Stellenrang diese mathematischen Inhalte für den Erwachsenen haben.

b. Zum zweiten kann das Verhalten Erwachsener in stochastischen Situationen als Endpunkt einer langen intellektuellen Entwicklung gesehen werden. Gerade BRUNER hat uns dazu geführt, Probleme des Unterrichts vom Kindergartengrad bis zum Universitätsniveau in einem einzigen Zusammenhang zu sehen. Dazu kommt noch folgendes: Kennen wir das stochastische Verhalten Erwachsener, wissen wir, in welchen Situationen sie am häufigsten Fehler machen, so können wir im Unterricht frühzeitig besonders auf diese speziellen Problemsituationen eingehen.

c. Ein letztes Argument, das Verhalten Erwachsener in stochastischen Situationen zu studieren, das mit b. eng zusammenhängt, bietet sich an. So wie es fundamentale Ideen gibt, gibt es auch fundamentale Fehler, die quer durch die Geschichte in allen Bildungsschichten immer wieder auftreten. Fundamentale Idee und fundamentaler Fehler sind nur die Seiten ein und derselben Medaille. Somit kann uns eine Phänomenologie fundamentaler Fehler nachträglich zur Prüfung dienen, ob unsere im I. Kapitel aufgestellte Liste fundamentaler Ideen repräsentativ ist.

1. Befunde und Hypothesen PIAGETs zur kognitiven Entwicklung

1.1. Allgemeine Aussagen

Über die allgemeine Theorie PIAGETs liegen gute Darstellungen vor[4], so daß ich mich hier stichwortartig auf die Hauptpunkte beschränken kann, die insofern wichtig für meine Arbeit sind, als die Entwicklung stochastischer Ideen eingebettet ist in die allgemeine kognitive Entwicklung des Individuums.

Nach PIAGET steht das Individuum ständig in Wechselwirkung mit Problemsituationen, die es mit Hilfe seiner Intelligenz zu bewältigen hat. Letzter Begriff darf nicht zu eng gesehen werden: "Intelligenz ist einfach die Gesamtheit der verfügbaren Strukturen innerhalb eines gegebenen Organismus in einem gegebenen Zeitraum seiner Entwicklung."[5] Diese Strukturen reichen von der niedersten, der sensomotorischen Stufe bis hin zur höchsten, der formal-logischen Stufe. Die Art und Weise, wie sich das Individuum mit seiner Umwelt auseinandersetzt, ist jedoch auf allen Stufen dieselbe. Es adaptiert nach außen, an neue Probleme und Situationen in ständiger Wechselwirkung der sich durchdringenden Adaptationsfunktionen der Assimilation und der Akkomodation.[6] Komplementär dazu findet im Organismus als Rückwirkungsprozess eine Reorganisation statt, bei welcher bestehende interne Strukturen umorganisiert, bereichert, verknüpft werden und so ein immer feineres und beziehungsreicheres ("mehrdimensionales") kognitives Netz ausgebildet wird, mit der sich die Umwelt einfangen läßt und kognitive Konflikte immer besser vermieden werden können. So wird beispielsweise in dem bekannten Experiment der GENFER Schule, in dem vor 3 - 5-jährigen Kindern eine Plastillinkugel zu einer Wurst ausgerollt wird, deutlich, daß die Kinder in einem Assimilationskonflikt stehen ('Länge oder Dicke?'), der erst im Laufe der weiteren Entwicklung verschwindet, wenn "die Zentrierung der Länge und des Umfangs eines verformten Körpers in das Gesamtsystem einer logischen Multiplikation -

4) vw. z. B. FLAVELL 1963, MONTADA 1970
5) FURTH 1973, S. 32
6) vgl. MONTADA 1970, S. 49

genauer einer Kompensation der beiden veränderten Dimensionen - integriert wird."[7] Diese Integration ist überhaupt kennzeichnend für die gesamte kognitive Entwicklung des Individuums:

> Einmal gebildete Strukturen werden nicht einfach über Bord geworfen, sondern innerhalb umfassender Strukturen integriert.

Außerdem weist sie schon auf ein Hauptthema in PIAGETs Werk hin:

> Wissen besteht nicht aus Abbildern der Wirklichkeit, sondern aus aktiven Konstruktionen des menschlichen Organismus.

Es wird schrittweise - nicht linear, sondern struktural, durch den Prozess der "reflektiven oder formalen Abstraktion " aus Handlungen, im späteren Stadium aus Operationen aufgebaut. Die Frage, warum sich das Individuum überhaupt in Richtung auf eine höhere Struktur entwickelt, benatwortet PIAGET mit seiner Gleichgewichtsthese. Er geht dabei davon aus, daß der Organismus ein "offenes, aktives selbstregulierendes System"[8] ist, in dem von Grund auf das Bedürfnis angelegt ist, kognitives Gleichgewicht mit seiner Umwelt anzustreben. Auf Grund vielfältiger Untersuchungen lassen sich nach PIAGET im Laufe der Entwicklung deutlich Stufen feststellen, deren Endstadien durch ein relatives Gleichgewicht gekennzeichnet sind. Die Einteilung ist nicht ganz einheitlich[9]. Üblich ist die folgende, die auch von FLAVELL verwendet wird:

0 -	18 Monate	Stufe der sensomotorischen Operationen
bis ca.	7 Jahre	präoperationale Stufe
bis ca.	12 Jahre	Stufe der konkreten Operationen
ab 12 - 13 Jahren		Stufe der formalen Denkoperationen.

Die Charakteristika dieser Stufen sind in der Literatur sehr prägnant in Tabellenform[10] dargestellt, so daß ich hier auf die Erörterung der Einzelheiten verzichten kann.

---

7) vw. MONTADA 1970, S. 24
8) FURTH 1972, S. 60
9) in PIAGET/INHELDER 1951 benutzt Piaget folgende Einteilung: Stade I 3-7 Jahre, Stade II 7-11 Jahre, Stade III ab 12-13 Jahre
10) vgl. RAUH 1972, S. 25; STEINER 1973, S. 33, 78, 119

Ein erstes quasistabiles kognitives Gleichgewicht mit der Außenwelt erreicht das Kind gegen Ende des zweiten Stadiums, das gekennzeichnet ist durch die Ausbildung der Gruppierungen, die man als Operationssysteme ansehen kann, in denen eine gewisse Reversibilität und Kompositionsfähigkeit verwirklicht ist.[11] Mit der Ausbildung der Gruppierungen macht sich das Kind mehr und mehr die Invarianz gewisser Objekteigenschaften wie Mächtigkeit, Gewicht etc. bewußt, was auch bei der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes eine tragende Rolle spielt.

---

11) vgl. MONTADA 1970, S. 50 und WITTMANN 1973, S. 203-222

1.2 Befunde von PIAGET/INHELDER zur Entwicklung stochastischer Ideen beim Kinde

Mit Ausnahme einer kurzen Arbeit[12] ist "La genèse de l'idée du hasard chez l'enfant" die einzige Untersuchung PIAGETs, in der er sich mit der Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs beschäftigt. Versuchspersonen sind dabei Kinder zwischen 4 und 13 Jahren, deren Verhalten und Auffassungen in verschiedenen stochastischen Situationen festgestellt werden. Pro Versuch werden ca. 15 - 20 Kinder getestet. PIAGET/INHELDER teilen jede dieser Stichproben in drei Stadien[13] ein, wobei diese Einteilung offensichtlich nicht vor den Experimenten nach irgendwelchen Faktoren wie beispielsweise dem chronologischen Alter vorgenommen wird, sondern immer im Nachhinein je nach den Ergebnissen. So geschieht es oft, vor allem in den Altersübergängen 5 - 7 Jahren und 10 - 12 Jahren, daß sechsjährige manchmal in "Stade I", manchmal in Stade II (allerdings nicht dieselben VPn) oder zehnjährige manchmal in Stade II, manchmal aber auch in Stade III anzutreffen sind.
PIAGET/INHELDER beginnen in der Finleitung mit der Feststellung[14], daß der Mensch ständig in Ungewissheitssituationen steht, ja daß es eigentlich nur im Laborversuch oder in der Theorie deterministische Phänomene gibt. In der Wirklichkeit gebe es nur komplexe Phänomene, an denen der Zufall einen mehr oder minder großen Anteil habe. Während der Wilde, nicht auf äußere Kausalketten zurückführbare Ereignisse mit geheimnisvollen, dem menschlichen Auge nicht sichtbaren Naturmächten erklärt, ist nach PIAGET/INHELDER beim zivilisierten Erwachsenen eine "probabilistische Intuition" vorhanden, die solche Ereignisse auf den Begriff des Zufalls zurückführt. Von vornherein spricht vieles dafür, daß diese "intuitions"[15] nicht primär sind, sondern

12) PIAGET 1950

13) vw. Fußnote S. 109 - Ich werde im folgenden, um Verwechslungen zu vermeiden, den französischen Terminus beibehalten.

14) PIAGET/INHELDER 1951, S. 7ff. Dieses Standardwerk wird im folgenden meist kurz mit P/I abgekürzt.

15) PIAGET/INHELDER gebrauchen den Begriff der "probabilistischen Intuition" oft im Plural.

im Laufe der Entwicklung konstruiert werden. Ein wichtiges Indiz dafür ist das Phänomen der ständigen "Warum-fragen" bei kleinen Kindern, nicht nur bei Problemen, wo objektive Gründe angebbar sind, sondern auch in Bereichen, wo die Phänomene rein zufällige Ursachen haben. Es scheint so, als ob das Kind dieser Altersstufe hinter allem einen zureichenden Grund sucht und von seiner Existenz überzeugt ist. In einem solchen Weltbild gibt es aber keinen Zufall.
PIAGET/INHELDER bestätigen in einer Reihe von geistreichen Versuchen nachträglich, daß diese sogenannten "probabilistischen Intuitionen" nicht primär sind, sondern einer Entwicklung unterliegen, die mit dem chronologischen Alter stark korrelieren, noch stärker allerdings mit der geistigen Entwicklungsstufe.[16]

Es sind im einzelnen Versuche zu den Begriffen:

"irreversible Mischung"	Idee 5, 6, 9
"Bernoulliverteilung" und "Gleichverteilung"	Idee 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
"Zufällige und nichtzufällige Verteilung beim wiederholten Münzenwurf und beim Spinner"[17]	Idee 4, 5, 8, 9
"Urnenversuche mit Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten"	Idee 1, 2, 7, 10
"Versuche zu den kombinatorischen Grundoperationen"[18]	Idee 2, 6

16) im angelsächsischen Sprachgebrauch "mental age"

17) ich behalte diesen Terminus bei, weil weder das deutsche Wort "Kreisel" noch "Glücksrad" dafür adäquat erscheint.

18) vgl. Liste, Seite: 94-104

1.2.1. Begriff der "irreversiblen Mischung"

Im ersten Versuch legt PIAGET den Probanden eine rechteckige Schachtel vor, die in der Mitte - einer Schaukel gleich - gewippt werden kann.[19] An der einen Breitseite befinden sich acht weiße und acht rote Kugeln, die durch ein Holzbrettchen getrennt sind. Nach einer kurzen Wippbewegung, bei der die Kugeln aber nach einer geringen Elongation an ihren ursprünglichen Platz zurückkehren, werden die Kinder gefragt, wohin die Kugeln wohl gehen, wenn die Schaukel einmal ganz gewippt wird, wohin sie wohl gehen, wenn sie zurückgewippt wird etc. Außerdem werden sie aufgefordert, die einzelnen Bahnen zu zeichnen.

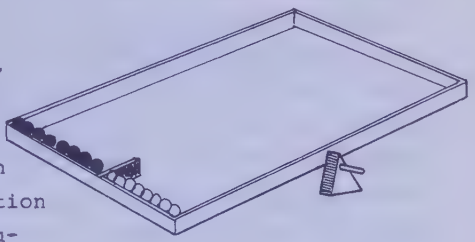


Fig.11

Das Experiment ist ein echtes Zufallsexperiment, denn weil es unvorhersehbar ist, in welcher Weise die Kugeln interagieren, ist es unmöglich, die Endlage abzugeben.
PIAGET findet bei den Probanden die folgenden Entwicklungsstadien:
Stade I (bis ca. 7 Jahre)

Diese Kinder erwarten keine fortschreitende Vermischung, sondern im Gegenteil, daß die Ordnung so bleibt. Sie erwarten beim zweiten Kippen sogar eine totale Rückkehr der Kugeln in ihr Ausgangsstadium. Kinder, die anders denken, tun dies nur mit halbem Herzen und lassen sich durch Nachfragen sofort verunsichern. Selbst, wenn sie nach dem ersten Durchgang sehen, daß die Kugeln sich vermischen, betrachten sie dies nur als zeitweiliges Zwischenstadium und glauben, daß der privilegierte, geordnete Zustand sich irgendwie bald wieder einstellt. Die Trajektorien werden so gezeichnet, als ob jede Kugel für sich, isoliert von den anderen, ihren Weg macht.

---

19) PIAGET/INHELDER 1951, S. 14

Auf Grund dieser Ergebnisse läßt sich folgendes sagen:

> Das Kind dieses Alters ist zentriert auf einen möglichen privilegierten Zustand und sieht nicht die Vielzahl aller möglichen. Wäre es fähig, alle möglichen Permutationen wenigstens geistig auf einmal zu sehen, wüßte es, daß die sich einstellende Vermischung (in gewissem Grade) irreversibel ist.

Schon hier drückt sich die das ganze Werk durchziehende Idee PIAGETs zum ersten Mal aus, daß das Verständnis für kombinatorische Operationen unabdingbare Voraussetzung ist für das Verständnis des Zufalls.

Stade II (7 - 11 Jahre)

Gegen 7 Jahre hin entwickeln die Kinder eine "Intuition des Zufalls". Sie erkennen, daß die Unordnung von Versuch zu Versuch größer wird und man erst nach langer Zeit möglicherweise zum Anfangsstadium zurückkehrt. Die Kinder sind nicht mehr so sehr zentriert auf die isolierte Sicht der einzelnen Kugeln, sondern schon eher fähig, die physikalischen Interferenzen und damit eine reicherhaltige Anzahl von Möglichkeiten zu sehen. Trotzdem haben die Kinder immer noch die Tendenz, eine bestimmte Richtung in den Prozess hineinzuinterpretieren, die sich in etwa so ausdrückt:[20]

> "plus le mélange augmente, plus les perles rouges iront du côté des blanches et réciproquement."

Sie zeichnen die Trajektorien immer noch so, als ob sich jede Kugel nach einem inhärenten Planmuster bewegte. PIAGET kennzeichnet die Schwierigkeiten der Kinder so: "--... à la difficulté de raisonner simultanément sur plusieurs déplacements à la fois." Es liegt nahe, die Unfähigkeit der Kinder, exakte Versuchsausgänge zu prognostizieren, in PIAGETs allgemeine Theorie einzuordnen. Hierin spielt das Vorstellen der Bahn einer einzigen Kugel die Rolle einer Operation. Damit bedeutet die gleichzeitige Vergegenwärtigung von 16 Kugeln in ihrer gegenseitigen Wechselwirkung eine Operation auf Operationen und ist somit in PIAGETs Terminologie eine Operation zweiter Mächtigkeit. Solche Operationen sind aber nach PIAGET erst

---

20) ibid S. 32

für das Kind im formal-logischen Stadium fassbar. Tatsächlich ergeben die weiteren Versuche PIAGETs mit älteren Kindern, daß erst in diesem letzten Stadium der Prozess des Mischens voll begriffen wird.[21] Schon an dieser Stelle bestätigt sich die auf S. 6 zitierte PIAGETsche These - wie auch in den folgenden Versuchen -, in folgendem Punkt:

> Sowohl in der Geschichte der Auseinandersetzung des Menschen mit der Natur - mit mathematischen Mitteln[22] - als auch in der Genese des Wissens beim Individuum bilden sich stochastische Strukturen erst nach dem Erwerb deterministischer aus.

Ganz deutlich zeigt sich diese Aussage bei dem im letzten Abschnitt besprochenen Versuch mit der "irreversiblen Mischung", bei dem die Kinder fast krampfhaft irgendein deterministisches Ordnungsprinzip suchen, obwohl es keines gibt.
PIAGET stellt sich konsequenterweise als nächstes die Frage, ob die Kinder in Versuchen mit Ordnungsprinzipien diese auch tatsächlich entdecken. Genauer: Bei vielen Versuchen stochastischer Natur wie beim Galtonbrett, bei der Radioaktivität, Regen auf Pflastersteinen[23] gibt es "im großen" wohl eine Gesetzmäßigkeit, während die Einzelereignisse ihre Unvorhersehbarkeit bewahren. ("individuelle Freiheit bei kollektivem Zwang"). Werden die Kinder bei solchen Versuchen die Regelmäßigkeiten im Wirken des Zufalls sehen? PIAGET macht hierzu zwei Versuchsserien: eine zu verschiedenen Bernoulliverteilungen mit dem Spezialfall der Gleichverteilung inbegriffen und eine zur Gleichverteilung in Reinkultur, nämlich die Simulation von Regen auf Pflastersteinen.

1.2.2. Bernoulliverteilungen ("zentrierte Verteilungen")

Den Kindern werden Boxen verschiedener Formen gezeigt[24]. Durch die Öffnungen werden Glaskugeln gerollt, die sich zwischen den eingezeichneten Leisten ansammeln. Zunächst müssen die Kinder

---

21) Überhaupt ist allen PIAGETschen Versuchen, die hier referiert werden, gemeinsam, daß die Kinder von Stade III alle gestellten Wahrscheinlichkeitsaufgaben zufriedenstellend lösen.

22) vgl. hierzu THOM 1972, S. 205

23) vgl. S. 64

24) P / I. S. 42

für die Einzelversuche Prognosen abgeben. Anschließend werden sie gefragt, wie das Bild wohl aussieht, wenn man viele Kugeln rollen läßt.[24]

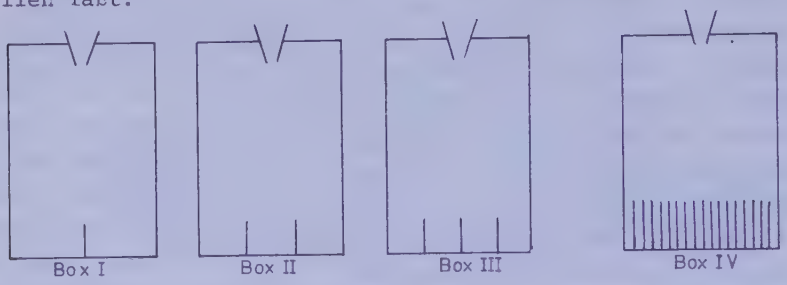


Fig. 12

Stade I (bis ca. 7 Jahre)

Manche Kinder dieses Alters haben zwar die Vorstellung einer Gleichverteilung bei Box I, aber diese Intuition ist nach PIAGET nicht "operativ", da sie sich entweder nur in diffusen Antworten: "... là ou là...", "...sais pas..." äußert oder[25] mehr einem moralischen Urteil gleicht: "... chacun à son tour...". Die kindliche Ratestrategie besteht entweder in einer ständigen Alternation der Prognose: Rechts - Links - Rechts. - ... oder einer Repetition: wenn eine Kugel nach rechts rollt, tut es wohl die nächste auch. Hinter der letzteren Strategie scheint die unausgesprochene Überlegung zu stecken: die erste Kugel muß wohl einen Grund gehabt haben, nach rechts zu rollen, und dieser Grund ist zureichend auch für die nächsten Kugeln. Beide Strategien lassen sich in das bisher Gesagte einordnen! Die einen Kinder begründen moralisch:

> weil es eben gerecht ist, daß jede Seite abwechselnd an die Reihe kommt, wird es in der Realität wohl ebenso sein;
>
> die anderen vermuten einen Kausalzusammenhang und richten danach ihr Verhalten aus.

Ein Großteil der Kinder sieht bei der Frage, was auf lange Sicht passiert, das Übergewicht bei einer der beiden Seiten,

---

24) P / I. S. 42

25) ibid S. 44f

ohne die Symmetrieverhältnisse zu berücksichtigen. Keine der kleinen Versuchspersonen PIAGETs überträgt die figurale Symmetrie in rationaler Weise auf die Problemlösung. (Grundidee 5[26]) und keine erkennt, daß die Verteilung mit zunehmender Zahl der Versuche regelmäßiger wird.

Box II - IV

Bei Box II setzen die Kinder entweder eine Gleichverteilung an - in der eben geschilderten Weise - oder prognostizieren gar, daß in einem der drei Fächer alle Kugeln landen.
Bei Box III räumen zwar einige dem zentralen Fach eine gewisse Priorität ein, aber nur aus dem Grund, weil die Entfernung von diesem Fach zur Öffnung am kürzesten ist. Der größte Teil der Probanden vermutet eine irreguläre Verteilung. (ebenso bei Box IV)!
Zusammenfassend kann man festhalten, daß bei keinem Kind dieser Stichprobe:

a) die Erkenntnis und Anwendung der vorhandenen Symmetrien vorhanden ist (Grundidee 5).
b) eine Verallgemeinerung von Box I auf II oder von II auf III und IV zu registrieren ist.
c) eine Erkenntnis der zunehmenden Regelmäßigkeit sichtbar ist. (Grundidee 9.)

Stade II (7 - 11 Jahre)

In diesem Stadium sind die Kinder schon teilweise einer Quasiverallgemeinerung fähig. Sie transponieren ansatzweise schon Ergebnisse aus Box I - III auf IV.
Sie erkennen auch schon, daß die lateralen Häufigkeiten bei Box II - IV kleiner als die medialen sind. Trotzdem bleibt die Quantifizierung unzureichend. Der Grund liegt nach PIAGET darin, daß die Kinder noch nicht über das "Gesetz der großen Zahl"[27] verfügen und so die zunehmende Regelmäßigkeit nicht erkennen.
Teilweise transferieren sie schon Symmetrien auf das Problem - etwa bei den inneren Fächern von Box III - erkennen aber bei den Boxen II - IV nicht die lateralen Symmetrien.

---

26) vgl. S. 97

27) was in P/I 1951 als "loi des grands nombres" bezeichnet wird, ist bei uns das Prinzip der großen Zahl. vgl. S. 65

Daß auch in Stade II die wichtigsten Grundgedanken zur Beherrschung der Versuche noch nicht voll zum Tragen kommen, ist nach PIAGET in zweierlei Richtungen zu deuten:
Zum einen handelt es sich beim Erkennen der zunehmenden Regelmäßigkeit darum, in Termen von relativen und nicht absoluten Differenzen zu denken. Ein Verhältnis von 90 : 100 bei zwei symmetrischen Fächern ist mathematisch gesehen "besser" als 1 : 2, obwohl die absolute Differenz bei der zweiten Proportion weit kleiner ist. Jedes Verhältnis für sich auf "Identität zu überprüfen" stellt eine Operation dar, die vom Kinde geleistet wird. (Differenzbildung). Die beiden Verhältnisse - oder was letzten Endes das Gleiche bedeutet - die relativen Differenzen jedoch zueinander in Beziehung zu setzen, erfordert das Operieren auf Operationen, was wiederum eine Operation zweiter Mächtigkeit darstellt. Deswegen kann nach PIAGET auch erst das Kind aus Stade III das "Gesetz der großen Zahl" begreifen.
Ein zweiter Grund, den PIAGET nur andeutet, der sich aber, wie schon erwähnt, als roter Faden durch die ganze Abhandlung hindurchzieht, ist das Fehlen kombinatorischer Schemata. PIAGET drückt sich hier etwas dunkel aus:

> "... de ce point de vue, il est intéressant de noter que, à ce même stade III par opposition au stade II, l'enfant interprète correctement le rôle des clous de la boite IV dans le sens d'une simple multiplication des combinaisons, avec l'effect dans les deux directions. Or c'est précisement ce schème opératoire des combinaisons et permutations, dont on voit ainsi une manifestation précise à l'occasion du rôle joué par les clous..." 28)

Diese Aussage läßt sich in den Termini der mathematischen Kombinatorik verdeutlichen. Beispielsweise steckt hinter Box II ein zweistufiges Galtonbrett mit folgenden Ausgängen: Nur die Erkenntnis, daß alle vier Variationen "gleichmöglich" sind (Symmetrie!) und außerdem, daß zum mittleren Fach zwei Variationen gehören, führt zu richtigen Vorhersagen. Die gedankliche Repräsentation einer einzigen Variation in 29)

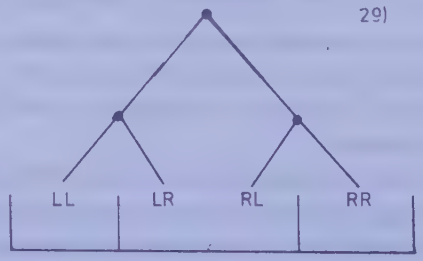


Fig. 13

28) P/I S. 61
29) R: rechts - L: links

ihrer Konkretion als Kugelbahn ist eine Operation. Somit ist das gleichzeitige Ins-Auge-fassen aller Möglichkeiten eine Operation zweiter Mächtigkeit, die erst von den Kindern aus Stade III voll geleistet wird.

1.2.3. Gleichverteilung ("Regenfall")

Wohl mit am schönsten dargestellt ist der Begriff der statistischen Verteilung einer Zufallsvariablen am schon erwähnten Beispiel des Regenfalls auf Pflastersteinen[30]. PIAGET sieht in diesem Beispiel besonders deutlich eine Synthese von Zufall und Gleichförmigkeit dank dem "Gesetz der großen Zahlen" verwirklicht.

PIAGET/INHELDER simulieren die Situation nach mit einem großen Stück weißem Papier, das in Karos von ca. 2-3 cm^2 eingeteilt ist (Pflastersteine!) und kleinen Glaswürfeln, die durch ein großes Sieb auf das Papier fallen (Regen!). Die Kinder werden wieder aufgefordert, einmal Prognosen über "individuelle Regentropfen", zum anderen über das auf lange Sicht sich einstellende Gesamtbild abzugeben.

Stade I

Die Kinder dieser Stufe sehen zwar im allgemeinen voraus, daß global die Tropfen "überall" hinfallen werden. Aber die Analyse zeigt, daß es sich um ein undifferenziertes Urteil handelt. PIAGET:[31]

> "... le 'partout' n'implique pas, chez les petits, une distribution à la fois fortuite et de plus en plus régulière: la dispersion commence par être régulière sans etre fortuit ou arbitraire, sans etre régulière."

Beispielsweise setzt Chau (6;2) die ersten vier Perlen ganz nahe zusammen, so als ob der Regen sich einen besonderen Punkt aussuche. Bei mehr Tropfen verteilt er sie so, als ob je Pflasterstein genau einer fiele.[32] Joc[33] gar, aufgefordert, anzugeben,

---

30) vw. S. 64

31) P/I, S. 63

32) ibid. S. 63

33) Ibid S. 64

34) dies trifft sich gut mit anderen Erfahrungen. H. Winter (mündliche Mitteilung) berichtet aus einer 1. Grundschulklasse, daß ein Kind, nachdem beim Würfeln eine 1 gekommen war, meinte: "Jetzt müssen wir sechsmal würfeln, bis wieder die 1 kommt." Ähnliches geschah bei eigenen Unterrichtsversuchen noch in einer 4. Grundschulklasse, als wir eine Urne

wieviel Tropfen man braucht, damit auf jeden Stein ein Tropfen fällt, zählt die Karos (20) und ist ganz sicher, daß bei 20 Tropfen jeder Pflasterstein genau einen Tropfen abbekommt.[34] Auch hier sieht PIAGET das Fehlen kombinatorischer Schemata als Hauptgrund für das Fehlverhalten der Kinder, ohne dies indessen genauer zu erläutern. Man könnte hier PIAGET folgende Auffassung unterstellen:
Rein mathematisch gesehen handelt es sich bei dem Versuch darum, sich zu vergegenwärtigen, auf wieviel denkbare Arten 20 unterscheidbare Objekte auf 20 Fächer verteilt werden können. Dies ist eine kombinatorische Grundaufgabe, bei der man sofort sieht, daß es außer dem ausgezeichneten Fall der eindeutigen Zuordnung eine Riesenzahl anderer Fälle gibt, die ebenso möglich sind.[35] Für das Kind von Stade I indessen scheint nur der eine privilegierte Fall in Frage zu kommen, sei es, weil das gestalttheoretische Prägnanzprinzip, das sich in einem Symmetriebedürfnis äußert, eine Rolle spielt, sei es ein mehr moralisches Urteil, daß jedes Karo eben gleich viel abbekommen soll und dieses "Soll" zum "Ist" gemacht wird.

Stade II

Die Fortschritte sind offensichtlich gegenüber Stade I. Die Kinder schreiben den Einzelereignissen keine künstliche Regelmäßigkeit zu, sondern begründen die Gleichverteilung als "Resultat zunehmender Kompensation"[36] und gelangen so zu einem gewissen Grad zu einer Synthese von "zufällig" und "regulär". Sie akzeptieren kleine Differenzen, etwa 100 : 80 oder 10 :11 und lehnen nur große Differenzen wie 20 : 100 als unmöglich ab. Was ihnen noch fehlt, ist die Fähigkeit, relative Differenzen zu vergleichen. PIAGET:[37]

> "Ce qui lui manque encore, pour qu'il saisisse opèratoirement ce processus, c'est à dire pour qu'il l'assimile à un schème combinatoire seul susceptible d'en fournir la raison, c'est la notion de la proportionnalité des différences."

---

so zusammenstellten, daß auf je zwei rote eine blaue Kugel kam. Nachdem anschließend gemischt war und wir zufällig zwei "rote" hintereinanderzogen, stellten einige Kinder die Prognose auf, daß es nun mit "blau", "rot", "rot" weitergehe.

35) nämlich $\binom{39}{20}$, vgl. ENGEL 1973, S. 41

36) P/I S. 66

37) ibid S. 66/67

Dies zeigt sich besonders deutlich bei folgenden Beispielen: Gis (8;10) meint etwa, daß 1 zu 2 und 10 zu 11 das Gleiche ist, "weil es beide Mal 1 mehr ist."[38] Oder Kal (9;6) glaubt sogar, nachdem das Zahlenverhältnis zweier Karos am Anfang 1 : 2 war, daß es am Schluß 99 : 100 sein wird; h. er konserviert die anfängliche absolute Differenz.[39]

Trotz aller dieser Mängel gibt PIAGET zu, daß die Probanden schon das besitzen, was man eine "qualitative Intuition der Proportionalität nennen könnte, gegründet auf den Ähnlichkeiten, die dem System der Korrespondenzen oder logischen Multiplikationen innewohnen."[40] Z. B. begründet Gra (10;2) beim Vergleich 1 : 2 und 10 : 11 schon recht exakt:[41]

> "... il y a seulement un de plus des chaque côté, c'est la même différence, mais quand il y en a plus, ca fait plus régulier."

PETTER schreibt auf der Grundlage der zitierten Versuche PIAGETs zu dem Problem des Vergleichs von relativen Differenzen:[42]

> "... jedoch ein positives oder negatives Proportionalitätsurteil zu fällen, bedeutet gerade eine Gleichwertigkeits (oder Ungleichwertigkeits-) beziehung zwischen zwei Gegebenheiten herzustellen, d. h., man muß eine Operation nicht mehr an Gegenständen, sondern an einem Material vollziehen, welches nur insofern existiert, als es das Produkt zweier anderer Operationen ist. Deshalb fällt es leicht, sich Rechenschaft darüber abzulegen, warum das Verständnis der Proportionen (und somit auch des Gesetzes der großen Zahl) sich erst nach 11 Jahren, also auf der Stufe des formalen Denkens einstellt."

PIAGET faßt die Ergebnisse der letzten beiden Versuchsserien selber so zusammen:[43]

> "... au stade I il n'y a, dans les deux cas, que régularité factice ou dispersion arbitraire (mais non encore concue comme fortuite);
> au stade II, il y a intuition des régularités (symmétriques ou uniformes), mais sans comprêhension du rôle des grands nombres, faute de schème combinatoire dans le premier cas, et de différences proportionelles dans le second;
> au stade III, enfin, la loi des grands nombres est comprise sous son double aspect combinatoire et proportionaliste."

Hinsichtlich des Zufallsbegriffs kann man nach diesen ersten PIAGETschen Versuchen folgern, daß er nicht primärer Natur

---

38) ibid S. 65 (Übersetzung von mir)
39) ibid S. 65
40) ibid S. 67 (Übersetzung von mir)
41) ibid S. 66
42) PETTER 1966, S. 335
43) P/I S. 68

ist. Vielmehr deutet nach PETTER (1966, S. 336) alles darauf hin, daß das präoperationale Kind "in dem Glauben lebt, es erfolge überhaupt nichts zufällig, sondern jedes Ereignis vollziehe sich auf Grund seiner eigenen Seinsursache.[44] (raison d'être)" (PETTER 1966, S. 336). Andererseits kennt das Kind in den Fällen, die tatsächlich Kausalgesetzen unterliegen, die Gesetzmäßigkeiten noch nicht, so daß "eine allgemeine Undifferenzierung zwischen Zufall und Nichtzufall, zwischen möglich und notwendig besteht."[45]

Diese Aussagen werden bestätigt durch die folgenden Versuche von PIAGET, die zwar ihrer Struktur nach ähnlich den bisher beschriebenen sind, andererseits auf Grund der Verschiedenartigkeit des Versuchsaufbaus (andere Zufallsgeneratoren) doch neue Erkenntnisse bringen.

1.2.4. "Zufällig - nicht zufällig"

Diese Serie besteht aus drei Teilversuchen. Beim ersten setzen PIAGET/INHELDER den Kindern einen Spinner mit Metallzeiger vor. Rund um den Zeiger sind in die farbigen Sektoren Körper mit Symbolen eingelassen, die beim ersten Durchgang unmagnetisch sind. Beim zweiten Durchgang wird ein Körper durch einen Magneten ersetzt, so daß der Eisenzeiger künstlich angehalten wird. Die Kinder sollen Prognosen und Urteile der eben geschilderten Art abgeben.

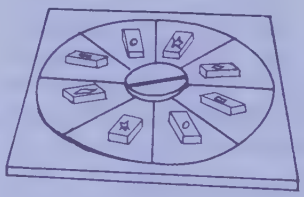


Fig. 14

Im zweiten Teilversuch werden den Kindern Spielmarken vorgelegt, die auf der einen Seite einen Kreis, auf der anderen Seite ein Kreuz tragen. Bis zu 15 Marken werden auf einmal hochgeworfen. Danach werden die Marken - von den Kindern unbemerkt - ersetzt durch solche, die auf beiden Seiten Kreuze tragen.

---

44) es scheint so, als ob das alte, heutzutage verpönte Prinzip vom unzureichenden Grunde beim Erwerb des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffes eine tragende Rolle einnimmt.

45) FLAVELL 1963, S. 342 (Übersetzung von mir)

Beim dritten Teilversuch sind in einem Säckchen rote und blaue Kugeln. Es werden Stichproben gezogen. Dann wird das Säckchen heimlich gegen eines vertauscht, in dem nur blaue Kugeln sind.

Stade I (Zufällige Versuche)

Fast allen Versuchspersonen gemeinsam ist der Glaube an die Vorhersehbarkeit der Einzelereignisse. Auch wenn die Kinder sich manchmal weigern, eine Prognose abzugeben, sind sie doch überzeugt, daß der Erwachsene dazu fähig ist, und man das Ergebnis angeben kann, "wenn man nur gut nachdenkt."[46] Die Kinder von Stade I benützen feste Kriterien, die aber wiederum so schwankend sind, daß sie ständig zwischen den Kriterien hin und her pendeln. Hauptkriterien sind die folgenden:

(1) Alternation: Nach einer bestimmten Farbe wird eine andere erwartet. Oft wird dieses Kriterium sogar noch verschärft zu:
(2) Die Farbreihenfolge des Spinners wird übertragen auf die Versuche. Wenn auf dem Spinner "Schwarz" hinter "Rot" kommt, wird dasselbe auch im Versuch erwartet.[47]
(3) Konstanz: manche Kinder glauben an eine Serie der gleichen Farbe.
(4) Einschätzung auf Grund von Farbähnlichkeiten z. B. Chap: (nachdem Grün gefallen ist) tippt auf Blau: "... au bleu, parce que ça me fait toujours la même genre.")

Weitere Kriterien dieses Stadiums, die eigentlich bei diesen Versuchen zu erwarten wären, die PIAGET aber erst in späteren Versuchsserien beschreibt, sind

(5) subjektiv-egozentrische Kriterien. Kinder sagen etwa "Rot" voraus, weil es ihnen einfach gut gefällt.

Daß diese letzten Kriterien an dieser Stelle nicht auftreten, dürfte zufälliger Natur sein und seinen Grund in den kleinen Stichproben haben.

---

46) ibid S. 123 Rob (6;6)
47) ibid S. 74 Chap (5;4), S. 75 Ber (5;9)

Alle fünf Hauptkriterien sind im Grunde genommen deterministische Schemata, die in zufällige Versuche hineininterpretiert werden. PIAGET (S. 79) kann deswegen mit Recht sagen:

> "Ces diverses réactions ont donc en commun une sorte de négation implicite du hasard, faute de compréhension du mélange des causes interférentes en jeu dans le phénomène; le sujet n'a point encore l'attitude du pari: il cherche à deviner, en postulant quelqu'en soit la forme, une solidarité cachée entre les coups successives, et il se fonde sur elle pour interpréter les résultats isolés."

PIAGET gibt sich damit nicht zufrieden, sondern macht die Gegenprobe, indem unbemerkt ein Magnet ins Spiel gebracht wird, die Säckchen vertauscht werden usw.[48]

Stade I (Nichtzufällige Versuche)
==========

Wäre der Zufallsbegriff in den Experimenten zuvor von den Versuchspersonen begriffen, so müßten sie stutzig werden, wenn nun - nach der Verfälschung durch Magnete etc. - ständig extrem unwahrscheinliche Ausfälle auftreten.
Tatsächlich drücken die Kinder aber bestenfalls mildes Erstaunen[49] aus ob der paradoxen Ergebnisse. Sie finden es ganz natürlich, daß von 15 geworfenen Spielmarken alle Kreuz zeigen. Ja, sie vermuten noch nicht einmal eine Täuschungsabsicht. Die Urteile sind zum großen Teil subjektiv, irrational und egozentrisch. Sie drücken sich aus in Feststellungen wie (S. 111f) "die Runden haben sich alle im Fallen gedreht.", weil sie "stark" oder "weniger stark" geworfen werden, "die roten Steine wollen nicht heraus". Charakteristisch ist wieder ein sehr starkes Symmetriebedürfnis, wie es sich etwa bei Wi (5;2)[50] ausdrückt: "vielleicht mehr Kreuze, weil es das letzte Mal mehr Runde gab." diese einfache Intuition, daß eben mal mehr Kreuze, mal mehr Runde kommen, besteht nach PIAGET nur deshalb, "weil die Erfahrung es sie so gelehrt hat und nicht, weil sie es aus einer kombinatorischen Operation ableiten.",[51] denn sonst würden sie so extrem unwahrscheinliche Ereignisse wie 15-mal Kreuz nicht "ganz normal" finden. Zudem wird auch diese Intuition durchweg deterministisch von den Kindern inter-

---

48) vw. S. 122
49) z. B. Chap (5;4) C'est drôle! S. 111
50) S. 122 (Übersetzung von mir)
51) ibid S. 112/113 (Übersetzung von mir)

pretiert. Sie meinen ja nicht: "Mal mehr Kreuz, mal mehr Runde," sondern vielmehr: "Wenn jetzt mehr Kreuz sind, gibt es im nächsten Spiel mehr Runde."

Stade II

Die Fortschritte gegenüber Stade I sind beachtlich. Die Kinder dieses Stadiums glauben nicht mehr an die prinzipielle Möglichkeit, isolierte Ereignisse vorherzusagen oder an versteckte Regelmäßigkeiten, die es nur zu suchen gibt. Allerdings räumen sie immer noch, etwa beim Spinnerspiel, einer Farbe, die noch nicht dran war, größere Chancen ein. Trotzdem:

Die Idee des zufälligen Einzelereignisses ist schon da und wird ergänzt durch die Suche nach Vorhersagen über die Gesamtheit.

In diesen Vorhersagen kommen erste kombinatorische Intuitionen zum Tragen. Z. B. meint Ber (7;2) auf die Frage, ob die Steine alle auf eine Seite fallen können: "Non, il y en a trop, ils sont trop mélangés."[52]

Bei den "gefälschten" Versuchen merken die Kinder im allgemeinen sofort, daß ein Trick am Werk ist, den sie meist auch herausfinden. PIAGET:[53]

> "Ayant dépassé grâce à ces premières intuitions combinatoires, le niveau du phénomenisme et de l'égocentrisme initiaux ils ne s'engagent plus dans des explications fondées sur le pouvoir du lanceur, mais considérent d'emblée le résultat comme contraire aux probabilités."

Eine erste unzureichende Quantifizierung bahnt sich an:

z. B. bei Man (9;5) (P/I S. 116)

P: "C'est possible qu'ils [die Spielmarken] tombent seulement sur la croix ou seulement sur le rond?"

M: "Oui, mais pas souvent."

P: "Sur 1000 fois, combien ca arrivera?"

M: "Deux, trois fois."

P: "Sur 10 fois?"

M: "Je crois une fois."

---

52) ibid S. 115

53) ibid S. 117

Die Kinder dieses Stadiums glauben auch keineswegs - so wie die aus Stade I -, daß sich bei den drei LAPLACEversuchen die Erwartungswerte genau einstellen, sondern halten Differenzen davon viel eher für möglich. Allerdings sind sie in diesem Punkt noch zu sehr den absoluten Differenzen verhaftet. Die Vorstellung, daß die Verteilung mit zunehmender Zahl der Versuche regelmäßiger werden, übersteigt noch die geistige Kapazität der kleinen Versuchspersonen.

Das bei dieser Versuchsserie zu Tage tretende Ergebnis, daß die Kinder aus Stade II schon recht gut zwischen "Zufall" und "Trick" differenzieren können, die Quantifizierung aber unzureichend ist, wird von PETTER (1966, S. 345) so interpretiert, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff später als der Zufallsbegriff erworben wird. Konsequenterweise macht PIAGET im folgenden Versuche zu Urnenvergleichen, wo quantifiziert werden muß. Leider handelt es sich nicht um die gleichen Versuchspersonen, wie bei den bisherigen Versuchen.

1.2.5. Urnenziehungen

In dieser Versuchsserie verwenden PIAGET/INHELDER Urnen mit verschiedenen, ständig variierten Inhalten - z. B. 15 gelbe, 10 rote, 7 grüne und 3 blaue Steine.
Doubles in gleichen Anzahlen bleiben als Gedächtsnisstütze in einer Reihe auf dem Versuchstisch aufgebaut. Es werden Teilmengen von einem oder zwei Elementen gezogen. Die Kinder sollen vorher ihre Prognosen abgeben.

Stade I

Hier ergibt sich wieder das vertraute Bild einer fast vollständigen Abwesenheit eines sicheren Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Wie bei den anderen Versuchen sind die Kinder ständig darauf aus, deterministische Schemata zu verwenden. Sie sind zentriert auf die figurale Anordnung der Doubles und urteilen darüber hinaus egozentrisch. BER (5;1) beispielsweise tippt bei seiner Prognose auf "Weiss", weil dieses in der Double-Reihe als erstes vorkommt. Ein anderes Kriterium besteht darin, wenn nur eine Kugel gezogen wird, auf die Farbe zu tippen, von der nur ein Stein in der Urne liegt, dagegen wenn zwei Kugeln auf einmal gezogen werden, auf die Farbe zu tippen, von der genau zwei vorkommen.
Ein anderes interessantes egozentrisches Kriterium ist die Farbpräferenz. BER tippt z. B. auf rot, "parce que j'aime bien le rouge." (P/I S. 130).

Stade II

Der wesentliche Fortschritt in diesem Stadium besteht darin, daß die Versuchspersonen sich loslösen von der Konstanz der Farbreihenfolge und als einziges Kriterium die zahlenmäßige Zusammensetzung der Urne berücksichtigen. Mathematisch gesehen haben sie die Permutationen der Grundmenge bzw. der Ausgangsreihe zusammengefaßt zu Klassen und abstrahieren damit von der figuralen Anfangsordnung. Allerdings geschieht dies nicht konsequent. CHER z. B. tippt, nachdem er aus einer

Population von 8 Gelben, 6 Roten, 4 Blauen, 2 Grünen ein "Rot-Rot"-paar und ein "Gelb-Rot"-paar gezogen hat, für das folgende zu ziehende Paar auf "Grün-Grün", weil "man das noch nicht hatte." (P/I S. 138) oder FRE (';6) gibt die Urne: 8 Gelbe, 4 Rote, 2 Grüne, 1 Blaue die drei aufeinanderfolgenden Prognosen "Gelb, Rot, Grün" ab.[54]

Als weiteres wichtiges Charakteristikum ist anzumerken, daß die Kinder die Änderung der Quantitätsverhältnisse durch Ziehen (ohne Zurücklegen) überhaupt nicht berücksichtigen. Das bedeutet im mathematischen Sinne, daß ihnen der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit nicht gewärtig ist.

Wieder führt PIAGET als Hauptgrund für diese Unzulänglichkeiten der Versuchspersonen, die unzureichende Elaboration von kombinatorischen Schemata an.

> "Psychologiquement comme logiquement, le jugement de probabilité est donc solidaire de l'élaboration d'operations quantitatives de combinaisons: tandis que le hasard résulte d'un mélange irreversible, le jugement de probabilité consiste au contraire à réduire par la pensée ce brassage à un système de combinaisons tel que l'on puisse retrouver les éléments mélangés en se fondant sur leurs rapports quantifiés de parties et de fraction." (P/I S. 137)

Zwar spielen im Laufe der Entwicklung innerhalb von Stade II kombinatorische Schemata eine immer größere Rolle, aber:

> "... l'intuition d'un brassage matérial n'est pas encore la compréhension du mélange combinatoire sans une structuration active, l'expérience ne suffit pas à conduire à elle seule, à l'idée du hasard ni a fortiori à celle de probabilité." (P/I S. 142)

Dieser Mangel ändert sich entscheidend erst in Stade III.[55]

---

54) P/I S. 138 vgl. hierzu auch GIN, S. 138

55) ibid S. 143

1.2.6. Urnenvergleiche

Mit am häufigsten immer wieder aufgegriffen und nachexperimentiert wurde in den letzten 20 Jahren vor allem die folgende Versuchsserie von PIAGET.
Hierbei gibt der Versuchsleiter zwei Grundgesamtheiten vor, bestehend aus Spielsteinen mit einem Kreuz oder Kreis auf der Vorderseite und blanker Rückseite. Die beiden Kollektionen werden nach Besichtigung umgedreht, gemischt, und das Kind soll angeben, bei welcher "Urne" seine Erwartung größer ist, ein "Kreuz" zu ziehen. PIAGET verwendet die folgenden Paare von Vergleichsurnen.[56]

(1)	doppelte Unmöglichkeit	0/2 --	0/2
(2)	doppelte Sicherheit	2/2 --	2/2
(3)	Sicherheit-Unmöglichkeit	2/2 --	0/2
(4)	Möglichkeit-Sicherheit	1/2 --	1/1
(5)	Möglichkeit-Unmöglichkeit	1/2 --	0/2
(6)	Identische Kompositionen	1/2 --	1/2
(7)	Proportionalität	1/3 --	2/6
(8)	Ungleichheit der Zahl der günstigen Fälle-Gleichheit der Zahl der möglichen Fälle	3/5 --	2/5
(9)	Ungleichheit der möglichen - Gleichheit der günstigen	2/5 --	2/6
(10)	Ungleichheit der günstigen - Ungleichheit der möglichen	1/2 --	2/3

PIAGET hält es von den Ergebnisse der Versuche her für nötig, Stade I und II jeweils in zwei Unterstadien einzuteilen.

---

56) Die Abkürzung a/b -- c/d soll bedeuten: vorgelegt sind zwei "Urnen". Die eine hat insgesamt b Plättchen mit a Kreuzen. Die andere hat d Plättchen mit c Kreuzen.

Stade Ia (4;6 - 5;9)

Dieses Stadium ist nach PIAGET charakterisiert durch das "vollständige Fehlen von quantitativen" Vergleichen (P/I S. 150), obwohl die Mächtigkeiten der Grundmengen durchweg die Zahlen 1 - 5 sind, die allgemein als vom Kinde dieser Altersklasse simultan erfassbare Zahlen angesehen werden. Daß die Kinder noch nicht einmal die Ahnung haben, es könnte überhaupt quantitative Vergleichskriterien geben, zeigt sich nach PIAGET an Interviews der folgenden Art:

Beim Versuch 2/2 -- 2/2, als die Kinder gefragt werden, bei welcher Kollektion die größere Chance besteht, ein Kreuz zu ziehen:

Fra: "Là (à gauche) parce qu'il y en a deux."[57]

Beim Versuch 1/3 -- 3/3

Jea: "Là" (1/3)
P : "Pourquoi?"
Jea: "C'est plus facile quand il y a rien qu'une croix."[58]

Beim Versuch 1/3 -- 1/6

P : "Et comme ca (1/6 et 1/3), où es-tu le plus sûr d'attraper du premier coup une croix?"
Lil: "Ici (1/6) parce qu'il y en a plus."
P : "Mais il y a combien de croix?"
L : "une"
P : "Alors où es-tu plus sûr?"
L : "Ici (1/6)"
P : "Pourquoi?"
L : "Parce qu'il y en a plus de jetons."[59]

Die Kinder scheinen bei 1/n -- n/n Vergleichen in Wirklichkeit auf die Frage zu antworten: in welcher Kollektion ist "Kreuz" einmalig oder besonders auffällig? oder wie PIAGET es ausdrück:

"... on me demande un seul élément, un rouge, et il y a là justement un rouge isolé; je vais donc parier pour lui et il est inutile de m'occuper des blancs..." (60)

PIAGET zieht aus allen diesen Verhaltensmustern den Schluß, daß das "Kind dieses Niveaus noch nicht im Besitz der elementarlogischen Operationen ist (Inclusion des Teiles in ein Ganzes...) oder der arithmetischen Operationen auf der Serie der ganzen Zahlen."[61] Er versucht die Phänomene einzu-

57) ibid S. 148
58) ibid S. 147
59) ibid S. 148
60) ibid S. 154
61) ibid S. 150

ordnen etwa wie folgt:

Wenn eine Kollektion B aufgeteilt ist in die beiden Klassen A und A', d. h. $B = A + A'$, so folgt aus $x \in B$ entweder $x \in A$ oder $x \in A'$. Dieser logische Schritt ist eine Disjunktion. Die Tatsache aber[62], daß das Kind nicht zwischen mehreren Möglichkeiten auswählt, sondern geradewegs auf eine bestimmte privilegierte Möglichkeit zusteuert, weist auf das Fehlen jeglichen disjunktiven Denkens hin, was umgekehrt die Basis für Wahrscheinlichkeitsaussagen wäre. Dieses disjunktive Denken wiederum hat die Erfassung der notwendigen Reziprozität der Vereinigungsoperation ($A + A' = B$) und der "Teilung" ($B - A' = A$, $B - A = A'$) zur Voraussetzung. Sobald das Kind einmal gedanklich in der Grundmenge B die Menge A der günstigen Fälle abgetrennt hat, hört die Grundmenge B auf zu existieren. Das Kind ist nicht fähig, gedanklich die Abtrennung rückgängig zu machen und so die günstigen Fälle zu den möglichen in Relation zu bringen. Was hier offenbar entscheidend fehlt, ist die Reversibilität von Operationen. PIAGET:[63]

> "Comme nous l'avons déjà constaté antérieurement, l'enfant ne saurait concevoir le hasard, c'est à dire l'incomposable et l'irréversible que par référence aux opérations composables et réversibles. Nous pouvons ajouter maintenant que lorsque de telles opérations font encore défaut, non seulement toute idée de hasard demeure inaccessible, mais encore et à fortiori toute notion des probabilité, puisque de telles notions consistent à inclure a titre de parties dans le tout, les cas favorables dans l'ensembles des cas possibles, composé disjoncivement..."

Damit sind die Phänomene eingeordnet in die Tatsache, daß sich nach dem gegenwärtigen entwicklungspsychologischen Wissen erst mit 6 - 7 Jahren die Gruppierung der Klasseneinschachtelung herausbildet.

Ein Punkt, den PIAGET hier nicht eigens anführt, sei noch als Ergänzung erwähnt. Auch bei den zuletzt geschilderten Versuchen kommen kombinatorische Operationen zum Tragen. Jede vorgelegte Kollektion ist ja eine Mischung i. e. Permutation der Ausgangskollektion, und die Versuchsperson muß, wenn sie eine Prognose abgibt, von den einzelnen Permutationen abstrahieren.

---

62) ibid S. 154
63) ibid S. 157

Stade Ib (6;1 - 7;6)

Das Verhalten dieser Versuchspersonen unterscheidet sich im wesentlichen nur in einem Punkt von denen aus Ia. Sie haben sich von der Vorstellung einer bestimmten, privilegierten Anordnung endgültig gelöst und treffen ihre Entscheidungen konsequent auf Grund zahlenmäßiger Kriterien, unter denen zwei hervorzuheben sind:
Die einen Kinder beurteilen z. B. 1/4 und 2/4 als gleich günstig, weil sie an die Gesamtpopulation denken[64], die anderen Kinder nehmen als alleinige Richtschnur die Zahl der günstigen Möglichkeiten.

Stade II (6;6 - 12/2)

Es überrascht nicht, daß die Versuchspersonen dieser Altersstufe, die ja im allgemeinen die ersten logiko-mathematischen Operationen schon erworben und sie in quasistabilen Systemen, den Gruppierungen, organisiert haben, insbesondere der Klasseneinschachtelung, die die Basis für disjunktives Denken im PIAGETschen Sinne ist, - alle Aufgaben beherrschen, die nur eine Variable beinhalten. Sie neigen dazu, erst einmal auf Grund der Zahl der günstigen Fälle zu entscheiden; falls das nicht geht, wie in den Aufgaben von (9)[65], so richten sie sich nach der Zahl der ungünstigen Fälle oder der möglichen Fälle. Die Antworten sind nicht mehr zögernd, sondern eher entschlossen. Die Kinder scheitern, da sie immer nur eine Variable in ihre Überlegungen einbeziehen, an Fragen zu den Aufgabentypen der Art 1/2 -- 2/6 oder 1/2 -- 2/3, wo sie in echte Assimilationskonflikte geraten.[66] Dennoch sind auch bei solchen Aufgaben schon beachtliche Ansätze sichtbar. Zum Beispiel erkennen die Kinder die Äquivalenz von (1/3) und (2/6) ohne weiteres, wenn eine besondere Gruppierungstechnik verwendet wird, nämlich der folgenden Art: (P/I S. 167)

Fig.15

64) ibid S. 161
65) vgl. S. 129
66) vgl. S. 108ff

Aber diese Erkenntnis auf figural-optischer Basis ist unstabil und macht sofort nach dem neuen Mischen dem alten Urteil Platz.

Mey: "Je prefère ici (1/3)"[67]

Weiterhin deutet sich bei einigen Versuchspersonen schon die Fähigkeit an, disjunktiv zu denken und zwei Variablen simultan Rechnung zu tragen.

Sou (8;3) beispielsweise meint bei der Aufgabe, 1/2 und 2/3 zu vergleichen:

> "Ici (2/3) c'est plus sûr, parce que je gagne deux fois et perds seulement une fois. Là (1/2) je gagne une fois et perds une fois."

Kinder mit diesen Antworten bleiben jedoch in den PIAGETschen Versuchen Ausnahmen. Die Mehrheit der Kinder dieser Altersklasse antwortet bei Fragen zu den Aufgabentypen (7) (10)[69] inadäquat, und PIAGET gibt auch den Grund dafür an. Soll das Kind etwa A_1/B_1 und A_2/B_2 vergleichen, so muß es zunächst einmal die Operation $B_1 - A_1$ und $B_2 - A_2$ ausführen, gedanklich aber gleichzeitig diese Operationen wieder rückgängig machen (Reversibilität), um A_1 zu B_1 und A_2 zu B_2 in Beziehung setzen zu können. PIAGET:

> "Il s'agit, en effet, de raisonner alors sur deux systèmes à la fois, ce que suppose les opérations formelles." 70)

Erst in Stade III sind die Kinder fähig, auch Aufgaben der Typen (7) (10) adäquat zu lösen[71]. Dabei verwenden sie schon Proportionalitätsketten und indirekte Schlüsse, wie z. B. Lut (12;5):[72]

> P :"Et (1/3) -- (8/17)?"
> Lut:"C'est plus facile pour (8/17). Si c'était égale, ce ferait (8/24)."

1.2.7. Kombinatorik

Wie an mehreren Stellen schon gezeigt, gipfelt eine der Hauptthesen PIAGETs darin, daß die Kombinatorik für das Verständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit die entscheidende Rolle spielt. PIAGET:[73]

> "Chacune des études précédentes nous à conduit à

---

67) P/I S. 167
68) ibid S. 163
69) vw. S. 129
70) P/I, S. 165
71) vgl. S. 129
72) P/I, S. 171
73) ibid S. 173

entrevoir une même conclusion: que la formation des idées de hasard et de probabilité dépend dans une étroite mesure de l'évolution des opérations combinatoires alles-mêmes."

Wenn dies aber so ist, so ist es nur konsequent, die kombinatorischen Grundaufgaben selber zum Gegenstand der Untersuchungen zu machen. Es geht dabei um Aufgaben der folgenden Arten: Die Kinder sollen aus Spielmarken mit 2 - 5 Farben ungeordnete Paare bilden, oder jeweils 2 - 3 "Papiermännchen" in allen verschiedenen Anordnungen (Permutationen) darstellen. Ähnliche Versuche werden auch zu Variationen gemacht.
Die Ergebnisse fügen sich nahtlos in das bisherige Bild ein:

Stade I

Die Kinder kommen nur durch unsystematisches Raten und Probieren zu partiellen Lösungen.

Stade II

Die Kinder verwenden schon partielle Systeme[74], um die Zahl der Permutationen und Variationen systematisch zu bestimmen. Einige Kinder finden sogar schon auf Anhieb das entscheidende Zählprinzip[74], scheitern aber bei der Verallgemeinerung auf mehr Elemente, wozu erst die Kinder von Stade III fähig sind.

PIAGET wertet diese Befunde wieder als Beleg für seine grundsätzliche These, daß zwischen dem Zufallsverständnis und dem Erfassen von Permutationen ein enger Zusammenhang besteht.
PIAGET:[75]

"Tant que l'enfant construit ses permutations empiriquement, comme au Stade I, sans conscience d'une règle quelconque (autrement dit en procédant lui-même au hasard de ses propres tâtonnements), il attribue d'autre part au mélange, c'est à dire au brassage consistant en permutations fortuites une structure relativement ordonnée et contraire à l'idée de hasard. Au contraire, c'est au moment où il entrevoit et dans le mesure ou il découvre les régularités opératoires propres aux permutations intentionnelles qu'il comprend la nature fortuite ou aléatoire des permutations inhérentes au mélange. Mais comme nous l'avons déjà noté à la fin du § précédent, cette double corrélation n'a rien que de très naturel."

Es ist hier eine interessante Tatsache anzumerken, daß nämlich ein und dieselbe mathematische Entität (Permutationen) im mathematischen und psychologischen Bereich verschiedene Stellenwerte haben. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung dient die Kom-

74) ibid S. 182
75) P/I S. 199

binatorik unter vielen anderen Verfahren im wesentlichen nur dazu, Elemente eines Stichprobenraumes zu berechnen. In der PIAGETschen Entwicklungspsychologie dagegen ist das Verständnis für Permutationen geradezu eine "conditio sine qua non" für die Erfassung der Zufallsidee. Es tritt hier die Paradoxie auf, daß einerseits im strukturtheoretischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie kombinatorische Begriffe keine Rolle spielen[76], daß sie aber im entwicklungspsychologischen Bereich fundamental scheinen. Diese Paradoxie ist ein deutlicher Beleg dafür, daß bei der didaktischen Aufbereitung eines Stoffgebietes, die strukturtheoretische Analyse zwar notwendig ist, aber nicht ausreichend sein kann. Im Grund motivierte mich diese Tatsache bei der Aufstellung fundamentaler Ideen, auch die Kombinatorik zu berücksichtigen.
Interessanterweise treten in den PIAGETschen Versuchen Stufenunterschiede mit am ausgeprägtesten auf, wenn beide Aspekte: 'Kombinatorik' und 'Wahrscheinlichkeit' eine Rolle spielen. PIAGET macht dazu folgenden Versuch:[77] In einem Beutel werden 20 rote und 20 blaue Kugeln vermischt. Anschließend werden Paare gezogen, wobei die Kinder Prognosen stellen müssen.
Stade I: Die Kinder tendieren dazu, farbhomogene Paare in ihrer Prognose zu bevorzugen, insbesondere wenn es die Lieblingsfarbe ist.
Stade II: Diese Kinder ahnen schon intuitiv, daß die gemischten häufiger vorkommen, aber sie haben noch nicht das notwendige Rüstzeug für die systematische Erfassung des Problems.
Stade III: Erst diese Kinder geben richtig begründete Urteile ab.

2. Kritische Wertung der PIAGET/INHELDERschen Befunde und neuere Forschungsergebnisse

2.1. Kritik der PIAGET/INHELDERschen Versuchstechnik

Man muß sich davor hüten, die Stufeneinteilung (Stade I-III)[78] von PIAGET als starre Alterseinteilung zu sehen. Überhaupt stellt die neuere Entwicklungspsychologie sehr in Frage, ob

76) bei KAPPOS 1960 treten sie überhaupt nicht auf
77) P/I S. 221
78) vgl. S. 109 Anmerkung 9

es überhaupt Stufen in der kognitiven Entwicklung gibt, und ob nicht vielmehr die ganze Entwicklung stetig verläuft.[79] Wie schon erwähnt, sind die drei "Stufen", von denen auf den letzten Seiten ständig die Rede war, mehr Ordnungsgesichtspunkte auf Grund der Versuchsergebnisse. Berücksichtigt man außerdem noch die mehr oder minder stark ausgeprägte Korrelation mit dem chronologischen Alter, so kann man sie nach OERTER (1973, S. 58f) auch als "Überschriften über einen bestimmten Altersabschnitt" auffassen. Eine Bedeutung hat die Einteilung in "Stades" insofern, als das Durchlaufen dieser drei "Stades" wenigstens in seiner Reihenfolge für jedes Kind in gleicher Weise zwingend sein dürfte. Im übrigen hat FLAVELLs Aussage (1963, S. 20) über den Zusammenhang von chronologischem Alter und Stadien auch heute noch seine Geltung:

> "Piaget readily admits that all manners of variables may affect the chronological age at which a given stage of funcioning is dominant in a given child: intelligence, previous experience, the culture in which the child lives etc. For this reason, he cautions against an overliteral identification of stage with age and asserts that his own findings give rough estimates at best of the mean ages at which various stages are achieved in the cultural milieu from which his subjects were drawn."

Speziell die PIAGETschen Versuche zur Entwicklung stochastischer Ideen wurden in den letzten 20 Jahren einer differenzierten Kritik unterzogen, vor allem aus den folgenden Gründen:

(1) PIAGET verwendet eine reine Interviewtechnik. Bei den Fragen und Antworten hängt sehr viel vom verbalen Verständnis der Probanden ab. Es kann vorkommen, daß ein Kind eine Frage anders auffaßt als der Versuchsleiter und deswegen in Wirklichkeit auf eine ganz andere Frage als vom Versuchsleiter gestellt antwortet.[80] PIAGET selber hat z. B. darauf hingewiesen, daß Kinder den Terminus "hasard" in mindestens drei verschiedenen Bedeutungen gebrauchen.[81] Innerhalb der Interviews sind Suggestivfragen nicht selten.[82] Ein weiterer Mangel besteht darin, daß die Fragetechnik nicht einheitlich ist. Jede Befragung verläuft anders und läßt zwar eine große Flexibilität zu;

---

79) vgl. OERTER 1968, S. 29f
80) vgl. auch FREUDENTHAL 1973/74 S. 302ff
81) P/I S. 127
82) z. B. S. 110

andererseits erschwert sie objektive Vergleiche.

(2) PIAGET berücksichtigt nicht, welche Farben die Kinder besonders gern mögen und bei Prognosen aus diesem Grunde auch gerne nennen. (Farbpräferenzen)

(3) Da die Stichproben klein sind und das Untersuchungsverfahren nicht standardisiert ist, scheint eine statistische Auswertung nicht möglich. Zudem ist jede Einzeluntersuchung, wie FISCHBEIN u. a. (1970a, S. 262) bemerken, von einem hohen Grad an impliziter Instruktion begleitet, die bei jedem Kind anders ist, so daß es sich nicht um ein reines Messverfahren handelt. Ein weiterer Mangel besteht darin, daß die Untersuchungen zu den einzelnen Begriffen jeweils an verschiedenen Stichproben[83] vorgenommen werden, so daß denkbare Korrelationen nicht festgestellt werden können.

(4) Mögliche Variablen wie Intelligenz, Geschlecht, soziale Umwelt, Belohnungseffekte werden überhaupt nicht berücksichtigt.

Daß PIAGETs Untersuchungstechnik so sehr auf sprachlicher Geschicklichkeit aufbaut, ist umso verwunderlicher, als der Sprache in der Schule PIAGETs, abgesehen von ihrer Funktion als Tradierwerkzeug wenig Bedeutung für die intellektuelle Entwicklung beigemessen wird.[84] FURTH sagt ausdrücklich: "... ist ein Kind im Grundschulalter zu operativem, intelligentem Verhalten fähig, das seinen sprachlichen Möglichkeiten um Jahre voraus ist."[85] Und Begriffe, z. B. solche wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur, gehören nach PIAGET in den Bereich des operativen Verhaltens und nicht in den der Symbole, welch letzterem ein Großteil der Sprache zuzuordnen ist.

Sehr früh nach PIAGETs Beitrag zur Entwicklung stochastischer Ideen, machten sich vor allem wegen des letzten Punktes Psychologen daran, PIAGETs Untersuchungstechnik zu verbessern. In einer der bekanntesten Arbeiten von YOST/SIEGEL/ANDREWS (1962) etwa wird die PIAGETsche Technik einer "nonverbalen Technik" gegenübergestellt, wobei mit der letzteren signifikant bessere Ergebnisse erzielt werden.

---

83) vgl. S. 126
84) FURTH 1973, S. 88
85) ibid S. 175

2.2. Übersicht über neuere Ergebnisse

Ganz grob kann man die Beiträge der zwanzig Jahre seit dem Erscheinen von "La genèse de L'idée du hasard chez l'enfant" in folgende Kategorien einteilen:

(1) Beiträge zum "Wahrscheinlichkeitslernen"[86], in denen festgestellt wird, welche Verhaltenswahrscheinlichkeiten sich in bestimmten Versuchstechniken bei Versuchspersonen herauskristallisieren. Solche Versuche wurden nicht nur bei Menschen, sondern auch bei Tieren durchgeführt.[87]

(2) Beiträge, in denen bestimmte stochastische Fähigkeiten bei Individuen ohne vorherige Instruktion gemessen werden.
   (a) bei Kindern
      (I) Proportionsvergleiche von Urnen (YOST/SIEGEL/ ANDREWS -1963-, KASS -1964-, DAVIES -1965)
      (II) andere stochastische Begriffe, unter anderem zur Unabhängigkeit und Kombinatorik (PIRE -1958-, GRATCH -1959-, COHEN/HANSEL -1961/1955[1]-, FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT -1967-, LEFFIN -1971-)
   (b) bei älteren Jugendlichen sowie Erwachsenen (PIRE[88] 1968, KOMORITA 1959, COHEN/HANSEL 1961, LEAKE 1962)

(3) dito wie bei (2) nur mit dem Unterschied einer vorhergehenden Instruktion (FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1970 a, b, 1969)

(4) Beiträge, die sich mit dem Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung in elementarer Form beschäftigen (Ojemann 1965, FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1970a, b, 1969) und über Erfahrungen dazu berichten.

2.3. Wahrscheinlichkeitslernen

MESSICK/SOLLEY (1957) testen die Voraussagen bei 3-, 4-, 5-, 7-jährigen Kindern, ob beim Aufdecken von Kartenstapeln eine Karte mit einem großen Tier oder mit einem kleinen Tier erscheint. Verschiedene "Inputwahrscheinlichkeiten"[89] werden

---

86) vgl. hierzu HILGARD/BOWER II, 1971, S. 432ff

87) vgl. BRUNSWIK 1939

88) daß einige Autoren in mehreren Kategorien auftauchen, liegt daran, daß sie verschiedene Altersgruppen in ein und derselben Arbeit untersucht haben.

89) in diesem Zusammenhang bedeutet dies "relative Häufigkeiten"

für die Kartenstapel vorgegeben, z. B. 100 %, 90 %, 75 %, 60 % für "groß". MESSICK/SOLLEY stellen fest, daß die Antworten der Kinder[90] gegen die Inputwahrscheinlichkeiten konvergieren[91]. Dieser Befund stützt die probabilistischen Lerntheorien und zeigt das Vorahdensein eines dem Organismus eigentümlichen "Messverfahrens für Erwartungswerte"[92]. Er zeigt außerdem, daß im Menschen von Grund auf das Charakteristikum angelegt ist, eine anfängliche Erwartung auf Grund weiteren Datenmaterials immer mehr zu modifizieren.[93]
Auf Grund dieser Ergebnisse läßt sich feststellen: auch 3 - 7-jährige Kinder reagieren auf Wahrscheinlichkeiten! Es erhebt sich die Frage, ob dies auf Grund von bewußten stochastischen Modellen geschieht. Daß dies bei den sehr jungen Kindern nicht der Fall scheint, zeigen die weiteren Versuche von MESSICK/SOLLEY, bei denen den Kindern ein hoher Belohnungsanreiz gegeben wird. Die Ergebnisse sind plötzlich ganz anders: Die Antworten der 7 - 8-jährigen konvergieren gegen 1, d. h., diese Kinder maximieren ihre Gewinnaussichten vermutlich auf Grund des folgenden einfachen stochastischen Erklärungsmodells: " 'groß' kommt öfter als 'klein'. Dann ist dies auch im Kartenspiel der Fall. Also ist es prinzipiell günstiger auf 'groß' zu tippen." Bei den 5-jährigen stabilisiert sich die relative Häufigkeit bei 90 %, d. h. "... sie gehen einen Kompromiß ein zwischen input-Wahrscheinlichkeit (75 %) und Gewinnmaximierung."[94]
Bei den 3 - 5-jährigen tritt trotz Belohnungsanreiz als Asymptote nach wie vor das Inputwahrscheinlichkeitsniveau auf.

---

90) wieder als relative Häufigkeit verstanden.
91) vgl. HILGARD/BOWER II, 1971 S. 432ff
92) auch bei Tieren läßt sich bei modifiziertem Versuchsaufbau dieses Phänomen zeigen. Vgl. BRUNSWIK 1939
93) vgl. hierzu das Schema von S. 83
94) MESSICK/SOLLEY 1957, S. 29
95) MESSICK/SOLLEY diskutieren noch die Tatsache, daß in der Erziehung und im täglichen Leben Verstärkungen z. B. durch Eltern selten konsequent durchgeführt werden, so daß sich möglicherweise bei den jüngeren Kindern "input-Wahrscheinlichkeiten" herausbilden. Tatsächlich glauben CRANDALL/SOLOMON/KELLAWAY 1961 auch beobachtet zu haben, daß solche Wahrscheinlichkeiten sich bei sehr jungen Kindern ausprägen.

Ähnliche Ergebnisse erzielen auch STEVENSON/WEIR 1957, 1963 STEVENSON/ZIGLER 1958, WEIR 1962. Auf Grund dieser Befunde muß man auch sehr jungen Kindern (ab ca. 5 Jahre) das Vorhandensein von Gewinnstrategien und damit auch von einfachen stochastischen Modellen zuerkennen. Auf Grund solcher Befunde wurden sehr bald Zweifel laut, ob PIAGET mit seiner Ansicht Recht hatte, daß Kinder dieser Altersstufe noch keinerlei Verständnis für Zufall, Proportionen und Wahrscheinlichkeit besitzen.

2.4. Befunde von YOST/SIEGEL/ANDREWS, DAVIES, PIRE COHEN, FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT z. a.

Die Ausführungen des letzten Abschnittes haben gezeigt, daß das Individuum schon in frühestem Stadium auf stochastische Situationen - wenn auch unbewußt - reagiert; - weiter, daß das aus den Ergebnissen von BRUNSWIK, MESSICK et al. abgeleitete "Theorem der Wahrscheinlichkeitsangleichung" nicht mehr gilt, sobald das Individuum bewußte stochastische Modelle anlegt. Im folgenden Abschnitt wird darüber referiert, welche bewußten stochastischen Modelle in verschiedenen Altersstufen verfügbar sind - auf Grund der Befunde und Tests verschiedener Autoren, die schon auf S. 138 erwähnt wurden.

Als eine der wichtigsten Arbeiten ist hier die von YOST/SIEGEL/ANDREWS (1962) zu nennen. Diese Autoren unterziehen 20 Kinder im Alter von 4;10 - 5;8 zwei Tests, der eine angelehnt an die PIAGETsche Versuchstechnik[96], der andere unter besonderen Versuchsbedingungen[97]. Die Versuchstechnik (P) ist im wesentlichen die von PIAGET, die ich auf S. 127 geschildert habe. Bei Versuchstechnik (DM) müssen die Kinder zwischen zwei durchsichtigen Kontainern wählen, wobei beide gleich viele Kugeln der bevorzugten Farbe, dagegen verschiedene Anzahlen der abgelehnten Farben enthalten. Somit sehen die Kinder die beiden Kollektionen stets vor sich, wobei nur die eine Kugel, die als nächste zu ziehen ist, unsichtbar bleibt.

Die Unterschiede zwischen den beiden Versuchstechniken haben YOST/SIEGEL/ANDREWS (1962, S. 779) selber so skizziert:[98]

condition P	condition DM
modified Piaget method	decisions-making technique
one box	two boxes
color choice	container choice
no control for color preference	control for color preference
no reinforcement other than knowledge of outcome	reinforcement

96) im folgenden (P) genannt
97) "Decision making oder kurz (DM) genannt.
98) ein Punkt bleibt vollkommen unverständlich. PIAGET selber hat darauf hingewiesen, daß die chancenreichste Farbprognose bei einer Kollektion eine schwierige Aufgabe darstellt als der Vergleich zweier Urnen. Eigentlich hätte sich damit der Vergleich (DM) und die Versuchsserie V von S. 129 und nicht die von S. 127 angeboten.

Die Hauptergebnisse der Versuche von YOST/SIEGEL/ANDREWS bestehen in den folgenden Punkten:

(1) die Versuchsbedingungen (P) führen zu denselben Ergebnissen, die auch schon PIAGET erzielt hat.
(2) Versuchsbedingung (DM) führt zu signifikant besseren Ergebnissen
(3) Unter (DM) sind Kinder der betrachteten Altersklasse sehr wohl fähig, adäquate Wahrscheinlichkeitsprognosen zu treffen, die offenbar gestützt sind auf die quantitativen Verhältnisse der Farben in den beiden Kontainern.

Diese Ergebnisse werden bestätigt durch andere Autoren wie z. B. GOLDBERG 1966 & DAVIES 1965.

GRATCH 1959 untersucht bei 6 - 11-jährigen Prognosen zu binären Zufallsfolgen und stellt fest, daß streng alternierende Prognosen umso häufiger sind, je jünger die Kinder sind, daß umgekehrt das Auftreten von homogenen Blöcken, die länger als zwei sind, kaum vorkommen.[99] Er bestätigt PIAGETs Feststellung, daß die jüngeren Kinder moralische Regeln und physikalische Gesetze verwechseln und ihre Wahl begründen mit Aussagen wie: "... weil es fair ist..."[100]. ROSS/LEVY 1958 führen ähnliche Versuche durch, in denen ebenfalls die Unabhängigkeit der Einzelereignisse in Zufallsserien eine zentrale Rolle spielen, und stellen im Gegensatz zu PIAGET und GRATCH fest, daß die Versuchspersonen vom 10. Grad aufwärts, sowie Erwachsene, stärker als die jüngeren Kinder dazu neigen, Einzelereignisse als voneinander unabhängig zu sehen.

DAVIES, C. M. 1965 testet 112 Kinder zwischen 3 und 9 Jahren mit einer ähnlichen Versuchstechnik wie der von YOST/SIEGEL/ANDREWS. Sie bestätigt zum einen PIAGETs These, daß das Erfassen von Wahrscheinlichkeit ein Entwicklungsphänomen ist, zum anderen aber auch YOST/SIEGEL/ANDREWS Ergebnis, daß das Verständnis für Wahrscheinlichkeit unter nonverbalen Bedingungen früher auftritt als unter PIAGETs Bedingungen. Einen Leistungsunterschied zwischen Jungen und Mädchen kann sie nicht feststellen. Dagegen zeigen nach den Befunden von PIRE (1958) die Jungen durchweg bessere Leistungen als die

---

99) d. h. Blöcke der Form 111111.....

100) GRATCH 1959, S. 224

Mädchen. PIRE benutzt dabei sowohl einen Test zu einfachen stochastischen Situationen, zum anderen einen Intelligenztest und bekommt als ein Hauptergebnis heraus, daß die Allgemeinintelligenz in starkem Maße mit der Bewältigung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben korreliert. Im übrigen stützen seine Ergebnisse die Befunde von PIAGET.

LEAKE 1962 geht dem Zusammenhang von Allgemeinintelligenz und stochastischen Fähigkeiten gezielt nach, und erhält durch Tests an Versuchspersonen des 7. - 9. Grades als Ergebnis, daß die geistige Entwicklungsstufe[101] bei der Aneignung stochastischer Begriffe ein weitaus wichtigerer Faktor als das chronologische Alter ist. Diese Aussage wird gestützt von LEFFIN (1971) und DOHERTY (1965), die beide Fragebögentechniken bei großen "statistischen Maßen"[102] verwenden. DOHERTY stellt zusätzlich das Fehlen irgendeines Anhaltspunktes für Geschlechtsunterschiede fest.

Im übrigen - was aus didaktischer Sicht höchst relevant erscheint - sind beide einer Meinung in folgendem Punkt:[103]

> "that children are learning a significant amount concerning concepts of probability from their environment without formal instruction and that this is taking place at an earlier age than many educators expected."

Die Ergebnisse von COHEN[104] hinwiederum passen insofern gut in das PIAGETsche Gesamtbild hinein, als nach COHENs Befunden vor allem die jüngeren Kinder von Aberglaube und Fairnessgedanken sehr stark beeinflußt werden.

COHEN führt u. a. eine Reihe von wiederholten, unabhängigen dyadischen Zufallsexperimenten vor 6 - 15-jährigen Versuchspersonen durch, die vor jedem Einzelversuch eine Prognose abgeben mußten.

COHEN stellt dabei folgende Charakteristika für die ganze Stufe von 6 - 11 Jahren fest:[105]

(1) alle Kinder neigen dazu, das Gegenereignis zu dem vorauszusagen, was gerade eingetreten ist.

(2) nicht die eigenen früheren Prognosen beeinflussen die unmittelbar folgende Prognose, sondern die tatsächlich ein-

---

101) "mental age"
102) ca. 500 VPn
103) SHEPLER 1970, S. 3
104) COHEN/HANSEL 1961 (1. engl. Auflage 1955)
105) ibid. S. 39f

getretenen Ereignisse.

(3) die älteren Kinder tendieren dabei eher dazu, eine ganze zurückliegende Ereignisreihe in ihre Überlegungen einzubeziehen.

Eine wegen ihrer didaktischen Relevanz bemerkenswerte Arbeit von FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT (1967) verdient noch besonders erwähnt zu werden.
Das Testmaterial besteht aus Holzrinnen[106], auf denen Kugeln rollen und an den Gabelungen nach links oder rechts abweichen können. Versuchspersonen sind 6 - 14-jährige Schüler.

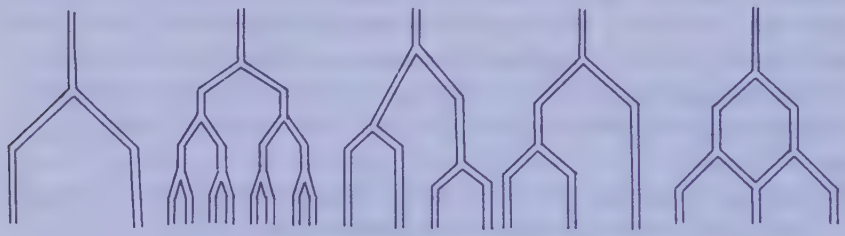


Fig.16

FISCHBEIN stellt dabei zu I - V an jede Vp zwei Fragen, wobei Frage A die Prognose für den Ausgang des Einzelversuchs, Frage B die Prognose für einen ganzen Block von Versuchen beinhaltet.

Im Gegensatz zu PIAGETs Befunden, stellt FISCHBEIN bei den Fragen I - III,A fest, daß die Vorschüler schon sehr gut zwischen Unsicherheit und Sicherheit zu differenzieren wissen[107], daß aber überraschenderweise die Zahl der richtigen Antworten mit dem Alter abnimmt[108] und daß bei den Fragen zu I - III,B keine großen Unterschiede zwischen den Altersgraden festzustellen sind. FISCHBEIN deutet das aufgetretene Phänomen zu I - III,A bei den Älteren so, daß:[109]

> "... die Intuition der Gleichwahrscheinlichkeit, die in einer elementaren Situation rasch auftritt, nicht genügend stabilisiert ist, ... um einer Komplikation der Situation standzuhalten.",

---

106) Abbildungen aus FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1967, S. 195ff
107) FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1967, S. 198
108) ähnliche Ergebnisse haben STEVENSON/WEIR 1959, S. 404 und MATALON 1959, S. 61ff aufzuweisen.

während die jüngeren Versuchspersonen die unwesentlichen Verkomplizierungen des Problems - vor allem bei III - gar nicht bemerken und so von vornherein unbefangener sind, und außerdem sowieso sehr Urteilen verhaftet sind, wie:[110]

"C'est ainsi que le bille veut marcher, elle va où cel lui plâit."

Dagegen sind die Ergebnisse bei Versuch IV - VI, wie sich zeigt, bei den Großen signifikant besser als bei den Kleinen, obschon letztere immerhin noch auf eine beachtliche Zahl an richtigen Antworten kommen, z. B. 55 % bei IV,B.
Daß die Großen, insgesamt betrachtet, relativ schlecht abschneiden, erklären FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT damit, daß der "... Unterricht systematisch einen einzigen der beiden Aspekte: 'Notwendigkeit und Zufall' begünstigt."[111]
So ist es kaum verwunderlich - jeder routinierte Lehrer kennt dieses Phänomen -, daß die Kinder Gründe suchen und finden, wo gar keine sind.

3. Kritische Wertung und Résümée zu den entwicklungspsychologischen Befunden

Nur wenige Resultate der letzten Abschnitte können wirklich als gesichert betrachtet werden. Hartgesottene Statistiker würden wohl überhaupt kein Ergebnis gelten lassen, weil die verwendeten Stichproben meist zu klein sind. Weiter gibt es einige Punkte, z. B. Geschlechtsunterschiede, in denen sich die Autoren widersprechen. Falls es außerdem stimmt, daß die geistige Entwicklungsstufe und der IQ die bestimmende Größe für die Beherrschung stochastischer Modelle sind, müssen Untersuchungen, die keine Parallelisierung nach diesen Größen beeinhalten, frag-

---

109) F/P/M 1967, S. 200 (Übersetzung von mir)
Nach GAGNÉ 1969 könnte man diese Tatsache dadurch erklären, daß die Versuchspersonen zwar schon in Unsicherheitssituationen gestanden haben und dadurch den Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit erfaßt haben, aber die Situationen dabei nicht genügend variiert worden sind, als daß die Versuchsperson nun von den irrelevanten Parameter (vor allen in III) abstrahieren könnten.

110) F/P/M 1967, S. 203

111) einen ähnlichen Standpunkt vertritt auch COHEN (1957), wenn er S. 138 schreibt:
"... our system of education tends to give children the impression that every question has a single definite answer...".

würdig erscheinen. Viele Mißverständnisse zwischen den Autoren dürften auch daher rühren, daß die verschiedenen Autoren verschiedene Definitionen von "Wahrscheinlichkeitskenntnissen" haben. HOEMANN (1971, S. 235) schreibt dazu:

> "... we recognize, though, that it is a matter of definition as to what one calls probability knowledge. Where as magnitude discrimination ist considered by us as only a precursor, by others it may be considered a genuine probability concept. Our view clearly accords more with Piaget's cognitive theory in what it puts the child's earliest glimmers of understanding with regard to probability concepts at the same developmental stage as the child's first envisioning of a concept of chance. Piaget and Inhelder's data show that 'the discovery of chance' does not occur until the onset of the period of the concrets operations, when the child is 6 to 8 years old. Magnitude estimation, by contrast, is almost completely mastered by this age and therefore plays no further role in the elaboration of chance and probability concepts that continues through adolescence."

Auch von der Versuchstechnik her zeichnet sich kein einzuschlagender Königsweg ab. LEFFIN (1971, S. 195), der auf Grund der gegen PIAGETs Interviewtechnik erhobenen Kritik an Hand einer recht großen Stichprobe von 500 Vpn eine ausgefeilte statistische Auswertung von genormten Fragebögen vornimmt, muß schließlich zugeben:

> "... it is not clear from the childrens written responses how they actually think about such items... further studies with the type of item used in test III, using an interview technique could provide valuable information about children's understanding of this concept as well as a deep insight into their understanding of sample space and probability of an event."

Diese Aussage deutet an, daß die Mathematikdidaktik feinere empirische Versuchstechniken braucht, als sie die Entwicklungspsychologen bisher entwickelt haben und daß die PIAGETschen Techniken immer noch trotz aller für und wider als eine der für die Mathematikdidaktik adäquatesten gelten dürfen.

Immerhin darf man auf Grund der vorliegenden Befunde insgesamt bei vorsichtiger Interpretation von den folgenden Arbeitshypothesen ausgehen:

(1) Je nach Untersuchungstechnik ändern sich die Ergebnisse
(2) je höher der Grad der Verbalisation in den verwendeten Testaufgaben ist, umso später (in ihrer Entwicklung) reagieren die Versuchspersonen adäquat auf stochastische Situationen.

(3) die Entwicklung stochastischer Ideen vollzieht sich nicht isoliert, sondern ist eingebettet in die Allgemeinentwicklung mathematischer Ideen.
(4) zwischen dem erreichten Grad von "stochastischen Fähigkeiten" und der geistigen Entwicklungsstufe besteht ein enger Zusammenhang.
(5) Ein Zusammenhang von chronologischem Alter und "stochastischen Fähigkeiten" besteht insofern, als es einen Zusammenhang zwischen chronologischem Alter und geistiger Entwicklungsstufe gibt.
(6) wegen (4) (5) ist das Auftreten "stochastischer Fähigkeiten" ein Entwicklungsphänomen.
(7) stochastische Ideen entwickeln sich auch ohne formalen Unterricht, werden aber behindert durch eine einseitige Ausrichtung des Unterrichts zum deterministischen hin.
(8) präoperationale Kinder, bei denen das intellektuelle Rüstzeug noch recht dünn ist, und die insbesondere Invarianzfunktion, Kompositionsfähigkeit und Reversibilität von Operationen nicht beherrschen, differenzieren auf Grund dessen sehr schwach zwischen "notwendig" und "möglich". Bei Wahrscheinlichkeitsaussagen über Urnen neigen sie zu moralischen Urteilen. Nur bei Verwendung ausgesuchter Kunstgriffe, sind sie zu Wahrscheinlichkeitsvergleichen fähig, die auf Quantitätsverhältnisse gegründet sind.
(9) der Zufallsbegriff ist genauso wie der Zahlbegriff ein operativer Begriff und muß nach ähnlichen Mechanismen konstruiert werden.

4. Erwachsene in stochastischen Situationen

Veranlaßt zu diesem Abschnitt hat mich eine Bemerkung des PIAGETschülers FURTH (1973, S. 100): "... die intellektuelle Entwicklung kann streng genommen nicht fehllaufen...". Wenn diese Aussage zutrifft, müßten Erwachsene, sobald sie die erforderlichen logiko-mathematischen Werkzeuge (Disjunktion, Konjunktion, Proportion etc.) erworben haben, fähig sein,

adäquat auf stochastische Fragestellungen und Probleme zu antworten. Leider gibt es, soweit ich die Fachliteratur übersehe, über das Verhalten Erwachsener in stochastischen Situationen keine systematische Darstellung. Allerdings gibt PIRE (1955, S. 143) Auskunft über die weitere Entwicklung ab "Stade III", das PIAGET noch untersucht hat:

"L'évolution se poursuit jusqu'a 16 ans anviron; elle est plus rapide dans les annees qui précèdent 13 ans."

Es spricht vieles für diese These, und wieder bei vorsichtiger Interpretation, kann man an älteren Jugendlichen von LEFFIN, COHEN, PIRE erzielte Befunde auf Erwachsene extrapolieren. Wenn man außerdem noch Details aus der Literatur, aus Presse und Fernsehen zusammenträgt, so ergibt sich schon ein recht differenziertes, wenn auch statistisch abgesichertes Bild.

COHEN (1955, 1957) hat auch ältere Jugendliche und Erwachsene zu Grundbegriffen wie 'Unabhängigkeit' etc. getestet. Er geht in seiner Konzeption davon aus, daß der Mensch ständig in Unsicherheitssituationen steht und dabei subjektive Wahrscheinlichkeiten[112] gebraucht, die "unser Denken und Handeln durchwirken und leiten".[113] Ein Ziel COHENs besteht darin, zu bestimmen, ob "subjektive Wahrscheinlichkeit irgendetwas mit mathematischer Wahrscheinlichkeit zu tun hat und in welchem Ausmaß subjektive Wahrscheinlichkeit eigenen psychologischen Gesetzen genügt.[114] Er führt beispielsweise 12 - 15-jährigen dyadische Ereignisblöcke vor, wobei einer der beiden möglichen Ausfälle schon mehrmals aufgetreten ist. Bei 85 % der Jüngeren (12 Jahre) und 63 % der Älteren (15 Jahre) ist die Idee der Unabhängigkeit nicht vorhanden. Standardaussagen der Versuchspersonen sind:[115]

Wechsel des Ausfalls ist fällig
Glück, Zauberei
Gesetz der Reihe
Beharrlichkeit

In einem anderen Versuch[116] dürfen die Versuchspersonen wählen, ob sie einmal aus einer Kollektion von 10 Losen oder zehnmal aus einer Kollektion von 100 Losen ziehen wollen.

---

112) vgl. S. 42
113) COHEN 1957, S. 128
114) COHEN/HANSEL 1961, S. 31
115) ibid S. 32
116) COHEN 1957, S. 128
117) mit Zurücklegen

Obwohl die Gewinnaussichten in beiden Versuchen gleich sind, bevorzugen 80 % der Vpn das einmalige Ziehen.
COHEN:[118]

> "... apparently the subjects feared that they might repeatedly draw the same ticket that they had put back."

An anderer Stelle meint COHEN:[119]

> "... nur wenige Erwachsene sind vollständig von den Kennzeichen der Urteile und Voraussagen frei, die für die Urteilskraft auf den verschiedenen früheren Stufen der Entwicklung des menschlichen Denkvermögens typisch sind."

Ein prominentes Beispiel hierfür ist LESSING, der am 15.12.1770 an MADAME KÖNIG schrieb, daß er bei der Hamburger Lotterie auf Los-Nr. 19 gewonnen habe und wieder Lose genommen habe, "... nur auf Nr. 19 nicht, wofür ich 7 gewählt habe, denn 19 wird doch nicht des Henkers sein und sich wieder herausziehen lassen."[120]

Ich selber habe im WS 1973/74 ca. 50 Mathematikstudenten der Pädagogischen Hochschule, die durchweg keinen Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung hatten, einem 'multiple-choice. Test' unterzogen, in dem ebenfalls Fragen zur Unabhängigkeit gestellt wurden, z. B.:

> Frage 4. Beim Roulettespiel ist in einer Serie fünfmal hintereinander "Rot" gefallen.
> a) wie hoch schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein solches Ergebnis ein (94 % falsche Antworten)
> b) welche Strategie empfiehlt sich für das folgende Spiel:
> ich tippe auf 'Schwarz'
> ich tippe auf 'Rot'
> ist egal
> (49 % falsche Antworten)
>
> Frage 6b, beim Lotto kam bei den letzten drei Ziehungen die '47' die letzten drei Wochen dreimal hintereinander, die '9' kam zweimal etc.
> Glauben Sie, daß es möglich wird, wenn sich unsere Technik weiterentwickelt, durch systematische Verwertung solcher Informationen über Jahre hinweg und anschließende Verwertung in einem Computer, die Gewinnchancen zu erhöhen?
> Ja Nein Vielleicht
> (42 % falsche Antworten)

Mit am bedrückendsten sind die Ergebnisse von 6b). Die für

---

118) ibid S. 128
119) COHEN/HANSEL 1961, S. 37
120) zitiert nach KREYSZIG 1968, S. 57

Mathematikstudenten hohe Zahl an falschen, oder nichtadäquaten Antworten gibt Anlaß zu vermuten, daß es überhaupt sehr vielen Menschen im sogenannten hypothetisch-deduktiven Stadium schwer fällt, zwischen Zufall und Kausalität zu unterscheiden. Mag es noch erheitern, wenn aus einer bayerischen Kleinstadt berichtet wird, daß die dortigen Stadtväter Woche für Woche für ca. 12 Mark Lotto spielten, in der Hoffnung, damit ihr Hallenbad zu finanzieren, so stimmt es schon nachdenklicher, daß Tag für Tag viele Menschen auf Angebote von "sicheren" Spielsystemen hereinfallen. Man kann dieselbe Haltung noch ausgeprägter bei Glücksspielern finden, die am Roulettetisch oft tagelang ihre Aufzeichnungen machen und erst dann spielen. Was soll man im übrigen von einer solchen Nachricht im Fernsehen halten, daß es in der Schweiz einen "Totohund" gibt, der durch Pfotengeben Tips abgibt und angeblich "fast immer richtig tippt?"[121] Keineswgs nur Kinder, wie man aus den Befunden PIAGETs herauslesen könnte, auch Erwachsene stehen oft dem Phänomen der Zufallsblöcke bei dyadischen Zufallsserien hilflos-irrational gegenüber. Die Illustrierte 'Quick' vom 7.3.1974:

> "Ein Unglück kommt selten allein. Millionen Menschen sagen das und die ahnen nicht, wie recht sie haben. Denn oft häufen sich Katastrophen, Unfälle und Krankheiten. Mit Zufall läßt sich das nur noch schwer erklären. Wissenschaftler sprechen in solchen Fällen vom magischen Gesetz der Serie."

So einfach geht das!

Daß man solche Zufallsrythmen und Zufallsblöcke auf ganz natürliche Weise mathematisch erklären und simulieren kann, ohne ein mysteriöses "Gesetz der Serie" bemühen zu müssen, hat BÖHME (1964, S. 18) gezeigt.

PIAGET schreibt an einer Stelle, daß es zwei Klassen von Individuen gibt, für die kein Zufall existiert: die präoperationalen Kinder und die Wilden.[122] Letztere führen Ereignisse, die Mathematiker als 'Zufälle' bezeichnen, auf das Walten überirdischer Mächte zurück. PIRE (1955, S. 131) meint, daß man anscheinend "... bei uns, sogar unter Erwachsenen, Leute findet, die sich diesbezüglich nicht sehr von den Wilden unterscheiden.", und es ist ihm zuzustimmen, denn eine Erklärung durch das "Ge-

---

121) ARD 27.3.1974
122) P/I 1951, S. 9-10

setz der Serie" durch zivilisierte Europäer ist qualitativ sicher nicht besser als die Erklärung durch überirdische Mächte. Bekanntlich gibt es auch in Mitteleuropa Menschen, die Kometen als Unglücksbringer ansehen, und es ist ziemlich sicher, daß dieser Aberglaube entstanden ist, durch das zufällige Zusammentreffen von bestimmten Ereignissen in einem oder mehreren Jahren, wie z. B. Missernten, Kriege und Kometen. Die Beispiele bei AUHOFER (1960), wo ähnliche Pseudoargumente zum Aberglauben führen, sind deprimierend, und noch deprimierender ist die Zahl von 29 % aller Menschen, die sich nach AUHOFER vom Aberglauben beeinflussen lassen. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch die Tatsache, daß sogenannte "Gottesurteile" mit Zufallsgeräten im weiteren Sinne nicht nur bei den Primitiven vorkommen. RENE CLAIR beispielsweise läßt in seinem Buch "Die Prinzessin von China" einen jungen Mann auftreten, der sein Schicksal als Summe von Münzenwürfen in konsequenter Weise bestimmt.

Halten wir fest: irrationales Verhalten gegenüber der Unabhängigkeit[123] von Ereignissen sowie dem Zufall allgemein ist Kindern, Wilden und abergläubischen zivilisierten Erwachsenen gemeinsam. Alle stehen sie ständig in Unsicherheitssituationen und nehmen an (zum großen Teil) binären Zufallsserien teil[124]. Es bleibt nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht aus, daß der eine oder andere in ein Intervall gerät, wo die Einsen oder die Nullen gehäuft auftreten. Das Individuum, bisher im Gleichgewicht, muß sich ein solches für ihn frappierendes Ergebnis erklären, um wieder ins kognitive Gleichgewicht zu kommen. Es adaptiert im PIAGETschen Sinne und führt als Erklärungsmechanismen die "schicksalshafte Macht des Glücks oder Unglücks,

---

123) vgl. auch das Verhalten d'ALEMBERTS dazu, S. 11. Mit am schönsten kommt die Hilflosigkeit vieler Menschen dem Phänomen der Unabhängigkeit gegenüber in dem folgenden Statistikerwitz zum Ausdruck:
Ein Mann erfährt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Flugzeug eine Bombe ist 1 : 1000 ist. Da ihm dies zu gefährlich ist, verzichtet er aufs Fliegen. Nach einem Jahr trifft ihn ein Freund im Flugzeug und ist recht erstaunt. Der Mann jedoch sagt: ich habe einen Statistiker gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß zwei Bomben im Flugzeug sind, und er antwortete 1 : 1 000 000, und seither habe ich immer eine Bombe bei mir.
Ähnliche Beispiele sind bei Wagemann, (1950) zu finden.

124) im folgenden als 100111101... geschrieben

Dämonen und Kometen, den "bösen Blick der Nachbarin" und andere "dei ex machina" zu denen auch das in der Alltagssprache benützte Gesetz der Serie zählt, ins Feld.[125]
Keineswegs kann man die These FURTHS von S. 147 in der Form stehen lassen, daß die geistige Entwicklung nicht fehlgehen kann. FURTH hat insofern recht, als sich beim Individuum irgendwie immer ein kognitives Gleichgewicht gegenüber seiner Umwelt einstellen wird. Aber dieses Gleichgewicht kann auch durch Erklärungsmechanismen wie Aberglaube und Magiegläubigkeit erkauft werden. Recht geschickt hat diese menschliche Verhaltensweise TOM STOPPARD in dem Theaterstück "Rosenkranz und Güldenstern" daraturgisch ausgenützt. Die Hauptfiguren werfen im Laufe des ersten Aktes immer wieder eine Münze, und es kommt ständig "Zahl". Die Zuschauer spüren wie unter einem Zwang, daß dies etwas zu bedeuten hat, daß irgendetwas Schicksalhaft-Dunkles sich über den beiden Hauptfiguren zusammenbraut, obwohl doch mathematisch gesehen nichts Unnatürliches daran ist, wenn 'Zahl' zwanzig oder mehr mal hintereinander kommt.
Vor allem in folgenden Bereichen der Stochastik ist menschliches Fehlverhalten geradezu idealtypisch und kommt auch im täglichen Leben besonders häufig vor:

a. wenn es um Wahrscheinlichkeitsberechnungen zu mehrstufigen Versuchen geht
b. wenn Stichproben allzu leichtfertig als "zufällig" bzw. repräsentativ angenommen werden
c. bei kombinatorischen Problemen
d. bei statistischen Überlegungen, vor allem beim Schluß von der Stichprobe auf die Population. ("statist. Syllogismus")

ad a. Hier fassen wir uns ganz kurz, da wir einige prägnante Beispiele wie die Probleme des Chevalier de MERE oder das Glücksspiel "chuck - a - luck" schon früher ausführlich dargestellt haben.[126] Meist geht es dabei um Fragestellungen der Art: "Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens

---

125) Weitere Beispiele zur Unabhängigkeit sind vor allem bei WAGEMANN (1950) und WALLIS/ROBERTS (1969) zu finden.

126) vgl. S. 83ff; zu diesem Bereich hat sich auch FREUDENTHAL 1973/74 S. 530ff ausführlich geäußert.

einen Erfolg bei n Versuchen", wobei das Individuum meist nicht erkennt, daß sich hinter dem Terminus "mindestens" die allgemeine Additionsregel für nicht disjunkte Ereignisse versteckt.

ad b. Nicht jede Tabelle zufälliger Zahlen ist als Zufallsgenerator[127] geeignet. Beispielsweise treten die ersten Ziffern von Telefonnummern im Fernsprechbuch oder von Autokennzeichen aus naheliegenden Gründen i. a. nicht mit denselben relativen Häufigkeiten wie die mittleren oder die letzten auf.[128] Hierzu ist sogar ein Gesellschaftsspiel entstanden: (vgl. WALLIS/ROBERTS 1969 (1956[1]); S. 274)

> "Man nehme irgendein Handbuch mit recht vielen statistischen Tabellen, öffne das Buch, wie es gerade kommt, und verlese die Zahlen in einer Kolonne. Für jede Zahl, die mit 1, 2, 3 oder 4 beginnt, soll Müller an Schulze einen Groschen bezahlen; für jede Zahl, die mit 5, 6, 7, 8, 9 beginnt, soll Schulze an Müller einen Groschen bezahlen. Schulze wird ein reicher Mann."

ad c. Es ist bekannt, daß das Individuum einen Trend zur Gleichverteilung besitzt.[129] Es ist desweger nicht verwunderlich, daß Erwachsene (bei gleichverteilten Zufallsvariablen) recht gut figurale Symmetrien auf eine daraus abzuleitende Gleichverteilung übertragen.[130] Dieses günstige Bild ändert sich jedoch sofort, wenn allereinfachste Bernoulliverteilungen vorliegen wie in dem folgenden Beispiel: Eine Münze wird zweimal geworfen. Gefragt ist nach den zu erwartenden Häufigkeiten für "Zahl-Zahl", "Wappen-Wappen" und "gemischt". PIRE (1955) erhielt bei praktisch isomorphen Aufgabenstellungen Erfolgsquoten von 23 % bei 18-jährigen Volkswirtschaftsstudenten und 42 % bei 19-jährigen Ingenieurstudenten. In meinem eigenen - schon erwähnten - Test erhielt ich bei derlei Aufgaben eine Erfolgsquote von ca. 40 % bei Mathematikstudenten.[131] Diese

---

127) d. h. zur Erzeugung einer zufälligen Stichprobe etwa aus dem Stichprobenraum, der aus allen möglichen, unendlichen Folgen der Ziffern 0 bis 9 besteht.

128) vw. hierzu WALLIS/ROBERTS 1969 S. 273f

129) Dies läßt sich auch gestalttheoretisch deuten.

130) vgl. hierzu die Versuche von PIAGET/INHELDER und FISCHBEIN u. a. auf S. 116, 144

131) Ähnliche Befunde liegen vor von KOMORITA (1959), BERGMANN (1973) u. a

Ergebnisse passen gut zu den Befunden von LEFFIN (1971 S. XVIII), in denen er feststellte, daß Testitems, die Fragen nach einfachen kombinatorischen Operationen enthielten, "extrem schwer" fielen.

ad d. Wohl am auffälligsten zeigt sich stochastisches Fehlverhalten Erwachsener bei statistischen Aussagen.[132] Und sicherlich steckt viel Wahres in "... der uralten Geschichte von der Lügenhaftigkeit, ... die sich von der Notlüge über die gemeine Lüge bis zur Statistik steigere." WAGEMANN (1950, S. 1) gibt hierauf auch die einzig passende Antwort, wenn er etwas leidenschaftlich dazu sagt:

> "Die Statistik ist ein Spiegel; hüte sich hineinzusehen, wer nicht reinen Herzens ist."

Man ist versucht, diesen Ausspruch zu ergänzen durch:

> "Es hüte sich ... wer stochastische Modelle nicht beherrscht."

Es scheint zwar manchmal, als ob die frühere naive Statistikgläubigkeit bei vielen Menschen einem gesunden Mißtrauen gegenüber zu sorglosem Manipulieren mit Zahlen gewichen ist. Dieses Mißtrauen tritt jedoch, wenn überhaupt nur dann auf, wenn sich das Individuum bewußt statistischem Material gegenübergestellt sieht.

Tatsächlich dürften die meisten statistischen Schlüsse jedoch unbewußt ablaufen. Der Statistiker COCHRAN (1972, S. 15) meint zu Recht:

> "Unser Wissen, unsere Einstellung und unser Handeln stützt sich weitgehend auf Stichproben. Diese Feststellung ist gleichermaßen im Alltag und in der Forschung gültig."

Das Fehlverhalten, auf Grund viel zu kleiner Stichproben oder aber auf Grund nichtrepräsentativer Stichproben, Schlüsse zu ziehen und Urteile abzugeben, ist nicht nur bei Kindern[133], sondern auch bei fast allen Erwachsenen weitverbreitet. Die folgende Bildersatire, die wohl keiner erklärenden Worte bedarf, ist hierfür ein Musterbeispiel. (aus "STERN", Hamburg 1972)

---

132) vgl. hierzu auch die Beispiele von WALLIS/ROBERTS 1969, WAGEMANN 1950 und die Aussagen von STEGMÜLLER (1969 S. 644) über statistische Syllogismen.

133) vgl. hierzu das Beispiel von OERTER 1971 S. 199

»Ihr solltet euch wirklich schämen!«

Allgemeiner dürfte sogar gelten, daß wohl die meisten Vorurteile, von denen kaum jemand ganz frei ist, zurückzuführen sind auf statistische Schlüsse anhand ungeeigneter Stichproben. Gerade Vorurteile waren in der Geschichte der Menschheit schon immer Anlässe für Auseinandersetzungen, Streit und Krieg.

Zwar ist es wohl illusorisch, zu glauben, ein guter Statistikunterricht könnte auf die Dauer die Bildung von Vorurteilen verhindern. Wenn es jedoch gelingt, durch den Unterricht Menschen zu größerer Rationalität und stärkerer Selbstbewußtseinsmachung ihrer statistischen Schlüsse zu erziehen, möglicherweise dabei adäquate stochastische bzw. statistische Modelle zu konstruieren, die für das Individuum wirksame Werkzeuge sind, dann ist schon viel geleistet.

Kapitel III Didaktische Grundzüge eines Stochastikcurriculums in Primar- und Förderstufe

Einleitung und Übersicht

Ich habe im letzten Kapitel die Befunde zusammengestellt, die man erhält, wenn man das Verhalten von Individuen in stochastischen Situationen untersucht, die vorher keiner Instruktion unterzogen wurden. Es drängt sich nun - getreu dem BRUNERschen Rahmen - die Frage auf, welchen Stellenwert in dieser Entwicklung gezielter Unterricht haben kann.
Genauer gesagt: ist die geschilderte Entwicklung zwangsläufig oder läßt sie sich von Unterrichtsangeboten beeinflussen? Wenn man den zweiten Teil der Frage bejaht, inwieweit ist dann der Unterricht von entwicklungspsychologischen Randbedingungen abhängig? Nach welchen Gesichtspunkten könnten Unterrichtsangebote gestaltet werden, und wie könnten sie konkret für das Beispiel "Stochastik" aussehen?
Alle diese Fragen bilden einen wesentlichen Teil des nun anschließenden Kapitels. Da die Rolle der "antizipierenden Funktion des intuitiven Erfassens von Zusammenhängen"[1] in BRUNERs Konzeption eine entscheidende Rolle spielt, werde ich hierauf ebenfalls ausführlich eingehen. Dies ist umso mehr gerechtfertigt, als von führenden Fachvertretern der Stochastik immer wieder auf die Wichtigkeit der Intuition für das Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung hingewiesen wird, dieser Begriff aber kaum irgendwo thematisiert wird. Ähnliches gilt für den Begriff des "stochastischen Denkens."
Es wird gezeigt, daß alle diese Fragen und Probleme mit der Theorie der Curriculumspirale zusammenhängen. Eine zusammenfassende Betrachtung zur Rolle der Curriculumspirale und dabei zu beachtender didaktischer Prinzipien, vor allem im Hinblick auf den frühen Stochastikunterricht, soll dieses Kapitel beenden.

---

1) vgl. BRUNER (1970 S. 64f)

1. Kognitive Entwicklung und Mathematikunterricht

Der Terminus "Struktur" spielt eine grundlegende Rolle sowohl in der Mathematik, etwa bei BOURBAKI, als auch in der Psychologie, vor allem bei PIAGET und BRUNER, als auch in der Grundlagendiskussion der modernen Curriculumtheorie.[2] Es würde an dieser Stelle zu weit führen, ihn in seinen verschiedenen Bedeutungen ausführlich zu diskutieren.[3] Ich bin mir dabei der Gefahr der Fehlinterpretation und -argumentation wohl bewußt, die daher rührt, daß möglicherweise die verschiedenen Auffassungen von dem, was unter "Struktur" zu verstehen ist, nicht deckungsgleich sind.[4] Dennoch betrachte ich es als eine legale Folgerung u. a. aus dem "orthogenetischen Prinzip" von H. WERNER (1957), auch auf einer relativ undifferenzierten Ebene - was Begriffserklärung angeht - solche kaum erschöpfend und abgegrenzt definierbare Begriffe wie "Struktur" oder "Intuition" zu verwenden und dennoch zu einem wissenschaftlichen Fortschritt zu gelangen.

Es gibt bestimmte Bereiche der Mathematik, die als Theorien wohlabgegrenzter Strukturen aufgefaßt werden können.[5] Interessanterweise sehen nun viele Psychologen, vor allem PIAGET, eine direkte Korrespondenz zwischen solchen mathematischen Strukturen und gewissen kognitiven Strukturen.[6] Danach setzt die intellektuelle Beherrschung logiko-mathematischer Strukturen in ihrer formalen Form voraus, daß sich die entsprechenden Operationen, die ihren Ursprung in konkreten Handlungen besitzen, zu Operationssystemen (=Gruppierungen=[7]) organisieren. PIAGET sieht hierin eine Art Isomorphismus zwischen den BOURBAKISCHEN Mutterstrukturen und den Gruppierungen. Er zeigt beispielsweise, daß die Beherrschung der mathematischen Strukturbegriffe "Äquivalenzrelation" und "Ordnungsrelation" auf verschiedenen Gruppierungen, nämlich der "Klassenbildung" und der "Seriation", beruhen.

---

2) vgl. FORD/PUGNO 1972
3) vgl. hierzu BOUDON 1968, NAUMANN 1973
4) wäre es Pflicht, vorher zu definieren, was "Struktur" heißen soll, wären vermutlich die meisten Werke zur modernen Curriculumstheorie -etwa FORD/PUGNO 1972 oder auch BRUNER 1960- ebenso wie ein großer Teil des Schrifttums aus der Genfer Schule ungeschrieben geblieben.
5) etwa die Algebra als Theorie der algebraischen Strukturen
6) vgl. BETH/PIAGET 1966
7) vw. WITTMANN 1973

Es gibt auch Mathematiker, die eine direkte Korrespondenz zwischen mathematischen und intellektuellen Strukturen sehen. REVUZ (1965, S. 49) schreibt zum Beispiel:

> "Une espèce de structure correspond à un mode de pensée et chaque structure particulière a des possibilités d'action sur les ensembles quie en sont munis. La pensée qui a pris conscience de ces structures est obligatoirement active et spontanément agressive à l'égard des problèmes à résoudre. Dans ce contexte, un théorème n'est plus l'énonce d'une vérité conservée dans un ciel platonicien mais l'assurance de pouvoir agir d'une certaine manière, dans des conditions données."

Auch wenn man nicht ganz so weit wie REVUZ gehen und von "Denkmodi" sprechen will, so ist sich die moderne Entwicklungspsychologie doch in dem Punkt einig, daß sich die kognitive Entwicklung zwangsläufig im Aufbau von Strukturen abspielt, wie es etwa INHELDER/SINCLAIR (1973, S. 89) beschreiben:

> "Das Lernen von grundlegenden Denkoperationen heißt 'verstehen'. Verstehen besteht nicht in der schlichten Einverleibung vorgefertigter und leicht verfügbarer Informationen, sondern vielmehr im Wiederentdecken und Wiederfinden derselben durch eigene Aktivität...
>
> Zusammenfassend ist zu sagen, daß das Lernen den Entwicklungsgesetzen unterworfen ist, und Entwicklung besteht nicht nur aus einer sukzessiven Anhäufung von Lernelementen, da die Entwicklung Strukturierungsgesetzen folgt, die zugleich logischer und biologischer Natur sind."

FISCHBEIN (1969 S. 292) drückt diesen Standpunkt noch kürzer und prägnanter aus: "Les structures dérivent des structures." Strittig sind allein die didaktischen Konsequenzen. Nach PIAGET können die großen Strukturen nicht durch Üben hervorgebracht oder beschleunigt werden. Vielmehr ist man im Mathematikunterricht darauf angewiesen, ihre jeweiligen impliziten Reifungsprozesse abzuwarten - so lange, bis sie von selber zum Vorschein treten. Die Übung dient nur dazu, den erwachenden Strukturen Geltung zu verschaffen und sie damit zu stabilisieren. PIAGET (1968 S. 291) sagt hier sehr deutlich:

"Le succès de l'apprentissage est nettement subordonné au niveau de développement." [8]

Für die Stochastik würde dies bedeuten, daß der Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung erst dann einsetzen darf, wenn die Kinder ins formal-logische Stadium[9] eingetreten sind, in dem sie fähig sind, mit Operationen auf Operationen ("opérations de la seconde puissance") zu manipulieren. Nur teilweise gibt FISCHBEIN (1969 S. 291) dieser PIAGETschen Konzeption recht, wenn er schreibt:

"En réalité, l'apprentissage ne se réduit pas à une simple absorption d'information et à la formation de mécanismes mentaux sur un terrain neure. L'apprentissage implique un processus actif de reconstruction, avec des moyens intellecutels propres des données fournies. Ce qui signifie qu'il doit exister, en premier lieu, un tel système de moyens qui permette la reconstruction et l'assimilation des connaissances. Nous sommes, tout au moins en apparence, en plein cercle vicieux: le développement dépend de l'apprentissage, mais les effets de l'apprentissage dépendent, à leur tour, du niveau de développement des moyens intellecutels."

Interessant ist hierbei die Sehweise von Unterricht, die auch BRUNER vertritt und die ich durchgehend im folgenden zugrundelege: Unterricht wird nicht verstanden als ein Ort der Belehrung oder der Informationsübertragung vom Lehrenden auf den Lernenden, sondern eher als ein Ort, wo der Schüler Gelegenheit hat, dieselben aktiven Rekonstruktionsprozesse zu machen, wie in seiner natürlichen genetischen Entwicklung. So verstanden, hat der Unterricht der natürlichen Umwelt der Schüler sogar noch etwas voraus: während in der spontan ablaufenden Entwicklung ohne systematischen Unterricht, die Situationen und Mittel, an denen das Kind Erfahrungen sammeln kann, mehr oder weniger zufällig aufeinanderfolgen, hat der Unterricht die Möglichkeit, sie gezielt und nach Plan einzusetzen. Ebenso wichtig ist FISCHBEINs Bemerkung, daß sich der Unterricht nicht auf einem "terrain neutre" abspielt. Wollte man auf Grund der PIAGETschen Befunde erst im Alter von ca. 12 Jahren mit einem gezielten Stochastikunterricht beginnen, so wäre hierbei keineswegs mehr mit einem

---

8) vgl. hierzu die Erörterungen von SHULMAN (1970 S. 43)

9) bzw. "hypothetisch-deduktiv" oder "formal-operatorisch". Die Terminologie ist hier nicht einheitlich.

"terrain neutre" zu rechnen. LEFFIN (1971 S. 25) stellt hier auf Grund seiner Untersuchungen in dieser Altersgruppe eindeutig fest:

> "Without any doubt, the students had acquired considerable knowledge and ability to deal with problems about probability on the level of the three elementary concepts. This acquaintance was not due to being taught probability concepts, but must have come from their everyday experiences and exposures in growing..."

Alles das, was das Kind im Alter von 12 Jahren über Zufall, Wahrscheinlichkeit, Kombinatorik weiß - was man als eigene Strukturen im eingangs zitierten Sinne auffassen mag - ist gegründet auf vom Kinde erlebte konkrete Handlungen. Die stochastischen Erfahrungen wurden an irgendwelchen Situationen gewonnen und führten zu "Intuitionen", die man als Restsubstrat von vergessenen konkreten Situationen ansehen mag. Mit diesen Intuitionen muß der Pädagoge rechnen; er kann den zwölfjährigen Schüler - was Wahrscheinlichkeit betrifft - nicht als "tabula rasa" ansehen.

Aus allen diesen Gründen ist es naheliegend, stochastische Situationen, mit denen das Kind im Alltag sowieso ständig zu tun hat, in den Unterricht einzubeziehen. Es erhebt sich die Frage, ob dadurch möglicherweise eine Steuerwirkung auf die im II. Kapitel geschilderte "natürliche Entwicklung" gegeben ist.

BRUNER (1970 S. 49) bejaht diese Frage und macht deutlich:

> "Die geistige Entwicklung des Kindes läuft aber nicht mit der Regelmäßigkeit eines Uhrwerks ab; sie reagiert auch auf Einflüsse aus der Umwelt, besonders der schulischen Umwelt. Daher braucht der Unterricht in wissenschaftlichen Themen selbst auf der Grundschulebene nicht peinlich genau dem natürlichen Gang der Entwicklung des Kindes folgen: er kann seiner intellektuellen Entwicklung auch den Weg weisen, indem er dem Kinde herausfordernde, aber anspornende Gelegenheiten bietet, in seiner Entwicklung voranzukommen."

Neuere Arbeiten aus der GENFER SCHULE bejahen ebenfalls den Einfluß der sozialen Umwelt und der "facteurs dynamiques".[10] INHELDER spricht hierbei in Abgrenzung zur "genetischen" Auffassung PIAGETs von einer "optique épigénétique."[11]

---

10) vgl. INHELDER/SINCLAIR/BOVET (1974 S. 30)

11) ibid. S. 322

Allerdings, selbst wenn man alledem zustimmt, dürfte es nicht einfach sein, die adäquaten "Gelegenheiten", von denen BRUNERs obiges Zitat handelt, für die verschiedenen Altersstufen zu finden. Nach AEBLI ist dies sicher nicht möglich durch ein alleiniges Studium der entwicklungspsychologischen Befunde, wie ich dies in Kapitel II durchgeführt habe. AEBLI: (1972 S. 187)

> "Die Züge von Lernsituationen, welche dem Zögling optimales Lernen ermöglichen und die Lernangebote, welche zu bestimmten Leistungen hinführen, können nicht aus der Entwicklungspsychologie abgeleitet werden. Sie müssen aus der Theorie des kognitiven und des schulischen Lernens und der entsprechenden Empirie gewonnen werden."

Diese Aussage klingt schärfer, als sie gemeint ist. Tatsächlich bleibt der Wert entwicklungspsychologischer Befunde ungeschmälert, wenn man sie als grobe Orientierungshilfen auffaßt. Kein Unterricht kann im luftleeren Raum konzipiert werden, ohne die entwicklungspsychologischen Randbedingungen zu berücksichtigen. Dies erkennt ja auch FISCHBEIN an, wenn er zugibt, daß die Effekte des Unterrichts vom Stande der intellektuellen Entwicklung abhängen, die aber ihrerseits - und hier unterscheidet er sich von PIAGET - ganz entscheidend vom Unterricht abhängig ist. FISCHBEIN u. a. haben zahlreiche Unterrichtsversuche durchgeführt, um diese These zu stützen. In einem Unterrichtsversuch[12] wurden etwa kombinatorische Operationen wie Permutationen etc. mit 10 - 14-jährigen behandelt. FISCHBEIN kam dabei zum Schluß, daß die PIAGETschen Stufenunterschiede wohl auftraten, sogar "spektakulär", daß die "Unterweisung diese Unterschiede aber beträchtlich reduzierte."

> "... the effect of stage differences is partly counterbalanced by the higher receptivity of younger subjects, at least for some patterns of activity." 13

In einem anderen Unterrichtsversuch über Urnenvergleiche, bei dem die PIAGETsche "Gruppierungstechnik"[14] verwendet wurde, war sogar ein "spektakulärer" Unterrichtseffekt zu verzeichnen. FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT (1970b S. 387):

---

12) FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1970a
13) ibid S. 269
14) vgl. S. 133

> "... our data show that 9 - 10 year old Ss spontaneous responses scarely differed from those of preschool children; however following a brief systematical instruction their responses became comparable with those of 12 to 13 year old Ss ... our data confirm the finding that preschool children can correctly understand and cope with situations involving chance..."

FISCHBEIN schließt aus solchen Ergebnissen auf die Tatsache, daß der Unterricht, vor allem im Übergang zwischen dem konkret-operatorischen und dem formal-operatorischen Stadium beschleunigende Wirkung haben kann:

> "... le procès d'instruction peut influencer activement, peut accélérer l'apparition des structures correspondantes..." (FISCHBEIN 1969 S. 293)

BRUNER gar, beginnt sein Kapitel III in "Der Prozeß der Erziehung" mit seiner berühmten Hypothese, die in der Vergangenheit für manche Pädagogen ein Ärgernis darstellte:

> "An den Anfang setzen wir die Hypothese: jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden." (BRUNER 1970 S. 44)

Auf Grund dieser Aussagen könnte man bei oberflächlicher Betrachtungsweise den Eindruck bekommen, daß BRUNER und FISCHBEIN in der wechselseitigen Beziehung zwischen Entwicklung und Instruktion vor allem in der letzteren Komponente den alles entscheidenden Einfluß sehen, was eine zu PIAGET diamentral entgegengesetzte Sicht bedeuten würde. Man könnte aus der BRUNERschen Hypothese sogar die (absurde) Folgerung abzuleiten versuchen, daß es möglich sei, 6-jährigen Kindern Differentialgleichungen beizubringen. Daß das jedoch wohl nie möglich sein wird, liegt einfach an der Komplexität der dabei relevanten mathematischen Begriffe[15], die BRUNERs Aussage von vorherein in beträchtlichem Maße relativiert. Tatsächlich heißt der Ausdruck "Lehrgegenstand" im Originaltext"subject",[16] was für BRUNER alles das bedeutet, was einen gebildeten Menschen ausmacht. Die Rigidität obiger Aussagen von BRUNER und FISCHBEIN

---

15) vgl. hierzu MONTADA 1970 S. 15
16) BRUNER, J. The process of education Havard University Press-Cambridge 1960 S. 33

mildern sich auch noch von einer anderen Betrachtungsweise, nämlich, wenn man genauer untersucht, was mit "Auftreten von Strukturen" genauer gemeint ist.

Die ältere Mathematikdidaktik ging von der Voraussetzung aus, daß es nichts bringt, etwas anzureißen, was der Lehrer mangels der Aufnehmekapazität der Schüler doch nicht zu Ende bringen kann. Daher wurde bei einem Wissensgebiet immer so lange gewartet, bis es einer endgültigen Behandlung voll zugänglich war.[17]

BRUNER und FISCHBEIN dagegen meinen, daß dieses "Anreißen" - allerdings in ganz besonderer Weise verstanden - für die kognitive Entwicklung durchaus effizient ist. FISCHBEIN (1969 S. 298):

> "... une seconde modalité pour favoriser le passage aux caractéristiques d'un stade intellectuel supérieur consiste dans la préfiguration de ces caractéristiques par les moyens du stade précédent." (Präfigurationsprinzip!)

Was das bedeutet, sei schon an dieser Stelle an einem konkreten Beispiel beschrieben:[18] Mit LEGOsteinen lassen sich Türme nach vielerlei Regeln bauen und Spiele dazu durchführen. Ein Spiel besteht etwa darin, alle Türme mit drei Stockwerken und drei verschiedenen vorgegebenen Farben zu bauen. Dahinter steckt mathematisch die Aufgabe, alle Permutationen einer Menge von drei Elementen zu finden. Auch wenn der Lehrer sicherlich in einer Klasse von siebenjährigen Schülern nicht das Gesetz $P_{n,n} = n!$ herausarbeiten wird und kann, sondern sich damit begnügen wird, alle Türme bauen zu lassen und an Hand von Baumdiagrammen die Möglichkeiten abzählen lassen, so bilden sich doch nach FISCHBEINs Ansicht durch diese enaktiv-ikonische Arbeiten Verständniskerne, die sich in "Intuitionen niederschlagen"[19], und den späteren symbolischen Zugang erleichtern. Ohne an dieser Stelle die Klärung des Begriffes "Intuition" vorwegnehmen zu wollen, kann man doch sagen, daß in der Konzeption

---

17) ein typisches Beispiel hierfür ist die Schulgeometrie. Vgl. hierzu WITTMANN 1974 S. 67

18) Aktivitäten und Spiele zu LEGOsteinen sind in reicher Auswahl bei FREUND/SORGER 1971 zu finden.

19) "... condensées peu à peu en intuitions." FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1969 S. 17

FISCHBEINs und BRUNERs diese "Intuitionen" eine entscheidende Rolle darstellen, einmal als antizipierende Funktion für späteres analytisches Wissen, zum anderen dadurch, daß sie für das Kind im konkret-operatorischen Alter und früher eine Art grobe Modelle darstellen, um die Phänomene der Umwelt zu erfassen.[20] BRUNER hält sie für so wichtig, daß er ihnen ein ganzes Kapitel im "Prozeß der Erziehung" widmet. Deswegen erscheint es nach diesen vorbereitenden Ausführungen geboten, den Begriff "Intuition" im folgenden ausführlicher zu diskutieren, vor allem auch deswegen, weil wie in keiner anderen Disziplin von führenden Mathematikern immer wieder auf die Wichtigkeit der "mathematischen Intuition", und unter den Mathematikern wohl am meisten von Stochastikern, hingewiesen wird. Vor allem in Zusammenhang mit der "stochastischen Intuition" nahm in der Vergangenheit auch der Begriff des "stochastischen Denkens" einen breiten Raum in der fachdidaktischen Diskussion ein.[21]
Es soll im folgenden versucht werden, zur Klärung dieser beiden Begriffe beizutragen und ihren Stellenwert für die Didaktik der Mathematik herauszuschälen.

2. Der Begriff "Intuition"

2.1. Vorläufige Begriffserklärung"

Einer der vagesten, selbst im "Handbuch der Psychologie" nur am Rande erwähnten psychologischen Begriffe, ist die "Intuition". War sie für KANT noch "Anschauung", was ebenso schwierig zu definieren sein dürfte, so gilt sie heute eher als 'gefühlsmäßiges Erfassen einer Wirklichkeit'. Es ist indessen schwierig, irgendwo eine explizite Definition zu finden, und selbst der Sprachgebrauch bei einem und demselben Autor ist nicht immer einheitlich. PIAGET selber macht beispielsweise einen Unterschied

---

20) einen ähnlichen Standpunkt vertritt auch der Mathematiker THOM, wenn er davon spricht, daß der Explizierung von Begriffen eine lange Zeit der impliziten Reifung vorangehen muß. Vgl. THOM 1973, S. 198ff
21) vgl. SCHMIDT 1971

"Intuitionen" und "Intuition". Intuitionen, ich habe den Begriff schon mehrmals gebraucht, sind den anschaulichen Wurzeln des logiko-mathematischen Denkens zuzuordnen. Es sind nichtformalisierte, wohl aber verarbeitete Erfahrungen an konkreten Objekten und Handlungen.[22] Dagegen ist der Begriff "Intuition" in späteren Schriften PIAGETs nicht mehr auf diese Anfangsgründe beschränkt, sondern beliebig ausbaufähig auf jeder Stufe des intellektuellen Wissens.[23] Man wird PIAGET wohl am ehesten gerecht, wenn man "Intuitionen" als eine Form der "Intuition" im konkret-operatorischen Stadium -und früher- auffaßt.

Das Unterfangen "Intuition" in der Art, wie man es von der Mathematik und den Naturwissenschaften bei der Einführung neuer Begriffe gewöhnt ist, zu definieren, scheint von vornherein zum Scheitern verurteilt. Dennoch erscheint es vernünftig, im extensionalen Sinne verschiedene Aussagen zusammenzutragen, um pointiert ausgedrückt, wenigstens "intuitiv" zu erfassen, was Intuition ist.

DORSCH (1970 S. 208) bezeichnet sie als "... eingebungsartige, nicht durch die Erfahrung oder Überlegung, sondern auf mystische Weise durch unmittelbares Erfassen des Wesens einer Wirklichkeit gewonnene der Offenbarung ähnliche Einsicht."

An anderer Stelle ist sie für ihn:

"... ein Erfahrungsdenken, dessen einzelne Stationen nicht mehr voll bewußt werden."

WITTGENSTEIN (1964 S. 120) schreibt: "Wie wenn man statt 'Intuition' sagen würde, 'richtiges Erraten'? Das würde den Wert einer Intuition in einem ganz anderen Lichte zeigen. Denn das Phänomen des Ratens ist ein psychologisches aber nicht das des richtig Ratens."

Für den späten PIAGET ist Intuition "... immediate knowledge."[24]

---

22) In exakt diesem Sinne interpretiert POLYA (1973, S. 78) eine Aussage von KANT: "Thus all human cognition begins with intuitions, proceeds from thence to conceptions, and ends with ideas."
POLYA hierzu: "Learning begins with action and perception, proceeds from there to words and concepts, and should end in desirable mental habits."

23) vgl. BETH/PIAGET, 1966 S. 223ff

24) BETH/PIAGET 1966 S. 211

An anderer Stelle[25] sagt er etwas allgemeiner: "... in the broad sense the term intuition covers all that is not formalized."

Für BERNE (1949 S. 264) ist Intuition "... une connaissance basée sur l'expérience et acquise par un contact sensoriel avec le domaine, sans que celui qui intuit puisse formuler pour soi ou pour les autres comment il est arrivé aux conclusions respectives."

Im Standardwerk von WESTCOTT (1968 S. 97) wird "Intuition" angesehen als das Phänomen, das stattfindet

"... when an individual reaches a conclusion on the basis of less explicit information than is ordinarily required to reach that conclusion."

Sehr kompakt drückt BRUNER (1970 S. 102) das Wesen der Intuition aus: "Intuition impliziert den Akt des Erfassens des Sinnes, der Bedeutung oder der Struktur eines Problems oder einer Situation; sie verläßt sich nicht in erkennbarer Weise auf den analytischen Apparat von jemandes fachlicher Qualität."

Schält man aus allen diesen Definitionsversuchen Attribute heraus, die man dem intuitiven Denken und als Gegensatz dazu dem analytisch-deduktiven Denken zuordnen kann, so ergibt sich folgende Gegenüberstellung:

intuitives Denken	analytisches Denken
grob	elaboriert
unmittelbar	vermittelt
unbewußt	bewußt
eingebungsartig	überlegend
sprunghaft	stetig
strukturhaft vergröbernd	detailhaft deduktiv
ganzheitlich arbeitend, induktiv	deduktiv

25) ibid. S. 223

2.2. Bedeutung intuitiver Modelle in der Mathematik und den Naturwissenschaften

Auch wenn die Begriffserklärung bisher vielleicht nicht ganz befriedigend ausgefallen ist, besteht daran, daß es den Tatbestand "Intuition" gibt und daß sie gerade in den exakten Wissenschaften sogar höchst relevant ist, kein Zweifel. POINCARÉ (1913), HADAMARD (1945) und VAN DER WAERDEN (1968), um nur einige Namen zu nennen, haben sich ausführlich mit mathematischer Intuition beschäftigt. Überhaupt machen bedeutende Vertreter der Mathematik, einer Wissenschaft, die als die formalste überhaupt gilt, kein Hehl daraus, daß ein gutes intuitives Gespür unabdingbare Voraussetzung ist für einen Wissenschaftler, bei dem, wie BRUNER (1970 S. 64) bemerkt, die Intuition eine zweifache Rolle spielt.

1. Zum einen bleibt Intuition als einzige Erklärung, wenn jemand, der schon längere Zeit an einem Problem arbeitet, sich geradezu verbeißt darin, ohne Erfolg, - urplötzlich die Lösung vor sich hat, oft sogar in einem Augenblick, wo er gar nicht an dem Problem arbeitet. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die Entdeckung der Strukturformel des Benzols durch V. KEKULÉ. Typisch für diese Art der Entdeckung ist die Urplötzlichkeit, mit der die neue Idee ohne stetigen Übergang im Raum steht. Trotzdem wäre es verfehlt, hierin eine mysteriöse, eingebungsartige Offenbarung zu sehen, wie man es vielleicht aus dem Zitat von DORSCH ablesen könnte.[26]
Der Mathematiker LERAY, der durch sorgfältige Introspektion das Wesen dieser Intuition aufzuklären versuchte, kam zu dem Schluß, daß neue Ideen nur scheinbar aus dem Dunkel des Unbewußten ins Bewußtsein emporsteigen, daß sie vielmehr schon lange vorher vorhanden und nur in unwesentlichen Zusammenhängen versteckt waren.[27] PIAGET führt den Gedanken von LERAY weiter aus und stellt eindeutig fest:[28] "... the unconscious never creates anything by itself at the level of representative thought."

---

26) vgl. S. 165
27) nach: BETH/PIAGET 1966 S. 200
28) ibid. S. 201

Volkstümlich ausgedrückt, heißt das: Von nichts kommt nichts! Vielmehr hat das Unterbewußte die Funktion, vorhandene Wissensdinge immer wieder durchzugehen, zu registrieren, umzuordnen und neu zu gruppieren,[29] bis eine Idee, von unwesentlichen Details befreit, da ist. So gesehen ist aber diese Art der Intuition, die ich "entdeckende Intuition" nennen möchte, eine Konstruktion des menschlichen Geistes, und ihre Leistungsfähigkeit hängt entscheidend von der Reichhaltigkeit des vorhandenen kognitiven Netzes ab. BRUNER (1970 S. 65 sagt dazu:

> "... ein sehr intuitiver Mensch ist vielleicht mit etwas besonderem auf die Welt gekommen; daß er aber damit Erfolge erzielt, hängt von soliden Sachkenntnissen ab, von einer Vertrautheit mit dem Gegenstand,die der Intuition Stoff bietet."

Diese "entdeckende Intuition" ist eng mit dem Begriff der Kreativität verwandt und ist auch wohl das, was HADAMARD im Auge hat, wenn er schreibt:[30]

> "... the object of mathematical rigor is to sanction and legitimate the consequests of intuition, and there never was any other object for it."

2. Die zweite Art Intuition, von der BRUNER spricht, spielt sich ab, wenn erfahrene Ärzte einen Patienten auf Grund von -Außenstehenden diffus und oberflächlich erscheinenden- Eindrücken oft verblüffend richtig einschätzen, ohne dafür langwierige Laboruntersuchungen zu benötigen, oder wenn Hochschullehrer für Mathematik Dissertationsprobleme vergeben, die sie selber noch nicht gelöst haben, wo sie aber die Lösung in irgendeiner Richtung erahnen. Es gibt für dieses Phänomen die Redensart: 'Er hat einen Blick dafür'. Warum packt man bestimmte Beweise so und nicht anders an? Es läßt sich darauf wetten, daß die meisten Mathematiker einen Beweis des Satzes: 'es gibt kein Objekt mit der Eigenschaft E' oder 'es gibt unendlich viele objekte mit der Eigenschaft E' mit der indirekten Methode beginnen. Hier hat sich die Intuition schon zur Evidenz verdichtet. Auch im Laufe von Beweisen tritt die Intuition immer wieder

---

29) Man sieht, daß hier gestalttheoretische Prinzipien eine wichtige Rolle spielen.

30) zit. nach POLYA 1973 S. 78

als Orientierungshilfe ins Spiel, wenn es verschiedene Alternativen gibt, den Beweis fortzuführen.
Es gibt keinen vernünftigen Anlaß, zur Erklärung dieser Phänomene den Zufall zu bemühen, wenngleich er bisweilen eine Rolle spielen mag, oder von "mystischer Eingebung" zu reden. Die einzige adäquate Erklärung besteht darin, anzunehmen, daß auch diese Art der Intuition - ich möchte sie "Orientierende Intuition" nennen, auf Grund von reichhaltigen Erfahrungen zustandegekommen ist, wobei man sich aber der einzelnen Stadien dieses Prozesses nicht mehr bewußt ist. diese Meinung läßt sich durch Aussagen führender Entwicklungspsychologen stützen.
AEBLI (1972 S. 177/178) stellt klar, daß es

> "... im menschlichen Verhalten keine höheren Leistungen gibt, welche im Gefolge der physiologisch-anatomischen Reifung einfach auftauchen, ohne daß das Kind oder auch der Erwachsene Gelegenheit hat, die entsprechenden Erfahrungen zu machen und das Verhalten im innerlichen oder effektiven Vollzug auszubilden."

Intuition ist aber sicherlich eine solche "höhere Leistung", die vom Individuum ausgebildet werden muß. Um dann auch 'erfolgreich' intuitiv mit Sachgegebenheiten umgehen zu können, setzt die Bereitschaft voraus, sich von typischen intuitiven Verfahren, wie Analogieschlüssen[31], die sehr starken heuristischen Charakter haben, leiten zu lassen und sich nicht gegen solche nichtanalytischen Verfahren im heuristischen Vorfeld, wie sie BRUNER (1970, S. 66) beschreibt, zu sträuben:

> "... Im Gegensatz zu analytischem Denken geht intuitives Denken charakteristischerweise nicht in sorgfältigen, klar festgelegten Schritten vor sich. Vielmehr tendiert es zu Manövern, die anscheinend auf einer impliziten Erkenntnis des gesamten Problems basieren. Der Denkende gelangt zu einer Antwort, die richtig oder falsch sein mag, und er ist sich dabei des Weges, auf dem er zu ihr gelangt war, wenn überhaupt, kaum bewußt. Selten kann er adäquate Rechenschaft darüber ablegen, wie er seine Antwort erhalten hat, und vielleicht ist er sich nicht bewußt, welche Aspekte der Problemsituation er bei seiner Antwort nun gerade im Auge hatte. Intuitives Denken beruht gewöhnlich auf einer Vertrautheit mit dem fraglichen Wissensbereich und mit seiner Struktur, und

---

31) Ähnliches vertritt auch FREUDENTHAL, 1973 S. 78f

dies ermöglicht es dem Denkenden, herumzuspringen, Stufen auszulassen und Abkürzungen zu gehen."

Letzten Endes ist diese Art des intuitiven Denkens am besten als "vergröbertes Denken" charakterisiert, das mehr auf die großen Strukturen achtet und nicht so sehr auf die Details. Es ist auch kein Wunder, daß gerade in der Mathematik, wo die Wissensgebiete besonders feinmaschig aufgebaut sind, das größte Bedürfnis nach intuitivem Vorverständnis besteht, einfach deswegen, um bei aller Feinmaschigkeit des Aufbaus ständig die große Linie im Auge zu haben. Schon seit jeher haben gute Hochschullehrer beim Beweis großer Sätze ihren Zuhörern zunächst den groben Beweisgang und die wichtigsten Ideen, die darin eine Rolle spielen, klargemacht, bevor sie daran gingen, den Beweis selber - Hilfssatz für Hilfssatz - deduktiv vorzuführen. Und POLYA, der sich wohl wie kein anderer Mathematiker mit der Rolle der Heuristik und der Intuition in der Mathematik beschäftigt hat, sagt klar:[32]

"Lehrsätze müssen erst intuitiv begriffen werden, bevor sie bewiesen werden können."

Aus all dem Gesagten ergibt sich, daß auch diese zweite Art der Intuition, die "orientierende Intuition", sich selber nach eigenen Mechanismen aus Erfahrungen, - im weitesten Sinne verstanden -, konstruiert. Von daher ist die scharfe Trennung, die BRUNER macht, nicht mehr so recht gerechtfertigt. Interessanterweise faßt FISCHBEIN (1973 S. 222) die beiden BRUNERschen Aspekte der Intuition in den Begriff "antizipatorische Intuition" zusammen.

"By 'anticipatory intuition' I mean the global vision of the solution to a problem."

Auf Grund des nichtanalytischen Charakters der Intuition können Situationen nicht ausbleiben, in denen sie trügerisch ist, wo die mathematische Wahrheit etwas anderes sagt, als das Individuum intuitiv fühlt. Ein Beispiel sieht FISCHBEIN etwa im Satz, daß die Mächtigkeit der ganzen Zahlen und der

---

32) zit. nach LANGE 1972 S. 84

rationalen Zahlen gleich ist, und spricht in diesem Zusammenhang von einer "Intuition contrariée.[33]

Dagegen macht die Aussage, daß die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten geradlinig ist, auf keiner Stufe des Unterrichts Schwierigkeiten, einfach deswegen, weil dieses mathematische Wissen einem förderlichen intuitiven Terrain aufliegt, das in einem langen kindlichen Prozeß von konkreten Handlungen und Erfahrungen (z. B. eine Schnur spannen) aufgebaut wurde. FISCHBEIN spricht hier von einer "intuition auxiliaire" und verallgemeinert:

> "... les informations et les habitudes intellectuelles spécifiques à un certain corps de connaissances rencontrent, au moins dans certains cas, des tendances intuitives avec lesquelles elles interfèrent. ... l'accord entre ces tendances intuitives et la structure logique des connaissances constitue un élément essentiel de la compréhension et une condition de l'emploi indépendant et efficace de ces connaissances dans des circonstances variées." 34)

Auf den Mathematikunterricht bezogen heißt das: In den mathematischen Gebieten, in denen ein günstiges intuitives Terrain vorhanden ist, fügen sich die erlernten mathematischen Eigenheiten und Begriffe besonders gut ein. ("intuition auxiliaire"!) Diese die eigentlich mathematischen Inhalte begleitenden intuitiven Denkformen können auf die Dauer das analytische Wissen nicht ersetzen, aber sie stabilisieren und strukturieren das analytische Wissen schon grob vor[35], wie es BRUNER beschreibt:[36]

> "... die Intuition ergibt ganz aus sich heraus ein vorläufiges Ordnungsgefüge eines Wissenskomplexes, welches bei uns vielleicht das Gefühl erzeugt, daß die getroffene Einordnung der Fakten selbstverständlich sei, uns aber hauptsächlich dadurch hilft, daß es uns für weitere Bemühungen, die Wirklichkeit zu prüfen, eine Grundlage schafft."

In exakt dem gleichen Sinne wird die Funktion dieser "Intuition auxiliaire" als vorstabilisierendes Moment gesehen, wenn

---

33) FISCHBEIN/BARBAT/MINZAT 1971 S. 265
34) ebd. S. 265
35) Ähnliches meint auch wohl der Statistiker MÜLLER, wenn er schreibt: "Mathematik ist Fortsetzung der Intuition mit anderen Mitteln." D. W. MÜLLER 1974, S. 168
36) BRUNER 1970 S. 68; Unterstreichung wie auch in den folgenden Zitaten von mir

POLYA (1973 S. 77) DESCARTES interpretiert:

> "Intuition is the conception of an attentive mind, so clear, so distinct, and so effortless that we cannot doubt what we have so conceived."

POLYA hierzu:

> "Beauty in mathematics is seing the truth without effort."

FISCHBEIN unterscheidet noch einen weiteren Fall, außer denen der "intuitions auxiliaires et contrariées", nämlich den, wo gar kein intuitives Vorfeld da ist, etwa beim Satz, daß sich die Höhen eines Dreiecks in einem Punkte schneiden. Für die ersten beiden Fälle gebraucht er den Ausdruck "intuition of adhesion" und meint damit zusammenfassend:

> "The intuition of adhesion expresses itself in the feeling of evidence about a certain fact. It is intuitively evident that the relation of equality is transitive, that from any point not on a straight line there can be only one perpendicular to that line, that there is always a natural number greater than a given number ... etc...." (FISCHBEIN 1973, S. 222)

Es drückt sich hier aus[37], daß dem bewußten mathematischen Wissen unbewußte Intuitionen 'unterliegen'. Das heißt, die Beziehung von Intuition und Mathematik ist im Rahmen eines Schichtmodells zu sehen. Von daher bietet sich eine Parallele zur FREUDschen Theorie an. SIGMUND FREUD unterscheidet bekanntlich drei intellektuelle Bereiche oder Schichten: das Bewußte, das Vorbewußte und das Unbewußte, welch letzteres vom "Es" und vom "Über-Ich" beherrscht werden. Im Bewußtsein ist vielen Menschen klar, daß ihre Nöte und Ängste unnötig sind; nur ist diese rein akademisch-intellektuelle Erkenntnis für die seelische Gesundung fruchtlos, so lange das Unbewußte der treibende Motor ist. Genauso - um die Analogie weiter zu verfolgen - dürfte eine mathematische Regel im allgemeinen ineffektiv sein für die Anwendungen, wenn sie gegen eine beim Schüler vorhandene "intuition contrariée" verstößt.

Es lohnt sich, die FISCHBEIN-BRUNERsche Auffassung von Intuition an einem graphischen Strukturmodell klar zu machen:

---

37) wie im übrigen auch bei ENGEL 1971 a S. 243ff oder bei KRYGOWSKA 1969 S. 309:
"...la géométrie comme un domaine très favorable à l'activité multilatérale des élèves... pénétrée par des intuitions."

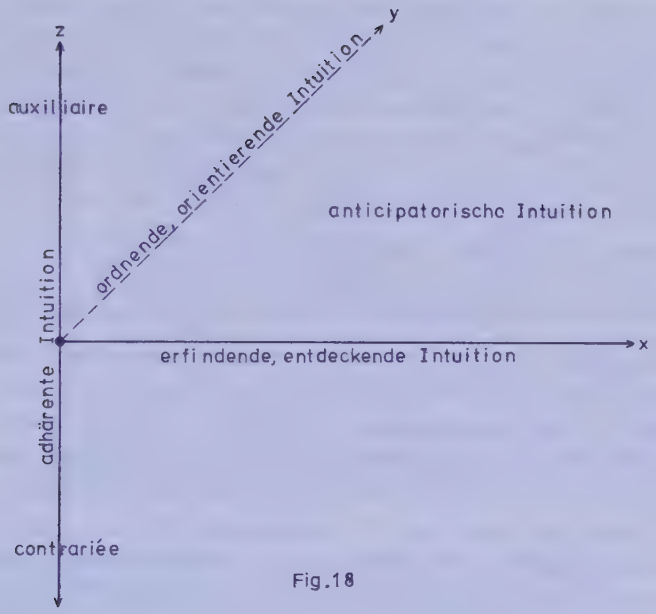


Fig.18

Inwieweit bei einem Beweis oder einer Problemlösung mehr die "erfindende Intuition" oder die "orientierende Intuition" beteiligt ist, wird durch einen Punkt der (x,y)-ebene angedeutet. Dadurch soll auch zum Ausdruck kommen, daß die Grenze zwischen den beiden Aspekten der Intuition eher fließend ist.
Die Tatsache, daß eine Intuition förderlich oder hinderlich sein kann, wird angedeutet durch die Koordinate auf der Z-Achse.

2.3. Genese intuitiver Modelle

Wir haben nur an einigen Stellen angedeutet, wie Intuition entstehen könnte und als vernünftige Arbeitshypothese formuliert, daß sie eine besondere Art von Erfahrung ist. PIAGET hat sich diesem Problem ausführlich gewidmet. In einer neueren Arbeit[38] beschreibt er zunächst die sogenannte Raum-Zeit

38) BETH/PIAGET 1966

Intuition, die für unser Anliegen weniger relevant ist. Interessant ist indessen, daß PIAGET den Aufbau dieser Intuition als einer Konstruktion des Individuums sieht. Er unterscheidet darüber hinaus schon sogenannte "operative Intuitionen".[39] Während Raum-Zeit-Intuition noch einen "erlebten"[40] oder bildhaften Charakter haben, sind die operativen Intuitionen eher autonom gegenüber jeder Form der Veranschaulichung und Vorstellung. PIAGET:[41]

> "There is a group of natural cpacities also called "intuitive"...whose later stages are characterized by operations more and more abstracted from material action (by "reflective abstraction"), but which are more and more independent of any form of representation: they are the operational intuitions... f.i. the intuition of n+1, Brouwers intuition of many - one ... and in a general way all that we call intuitive in the elementary handling of classes, relations and numbers concerned with discontinous elements."

Diese Form der Intuition ist in späteren Stadien vollkommen unabhängig von Vorstellungen oder aber trägt bestenfalls eine Vorstellung mit sich, die individuell ist und einer Allgemeinheit entbehrt. PIAGET führt diesen Gedanken der späteren Autonomie dieser Intuitionen gegenüber (figuralen) Veranschaulichungen weiter aus:[42]

> "But sooner or later operational intuitions divorce themselves from their symbolic imagery, and at the level of hypothetic- deductive operations they become independant of their content. Arising out of action, from which they are derived by reflecting abstraction, they thus acquire a complete autonomy in relation to the objects to which the actions relate (the latter interiorised into operations). This is easily explicable since they are not at any level derived from these objects but only from the actions exercised upon them, which is not the same thing."

---

39) Aus dem Zusammenhang ergibt sich, das PIAGET dasselbe "definiendum" meint wie BRUNER und FISCHBEIN
40) "lived-through" im Original
41) BETH/PIAGET 1966 S. 220
42) ibid.

Die Tatsache, daß Intuition psychologisch nicht von der Wahrnehmung aus fortschreitet, sondern durch Aktion und ihre Verinnerlichung in Operationen, welche sie zunehmend frei macht von Wahrnehmungsmodellen, macht es erklärlich, daß Mathematiker zum Beispiel durchaus eine nichteuklidische Intuition erwerben, und birgt wichtige didaktische Folgerungen:

> "...it affirms the possibility of developing new intuitions by operational learning, and then because it casts doubt on the existence of any clear break between the child's intuitions and these new intuitions..." 43)

Die zweite Folgerung besteht darin, daß die Ausbildung dieser operativen Intuition dank der reflektiven Abstraktion praktisch unbegrenzt ist. So profilierte Mathematiker wie FELLER oder auch POLYA schließen sich diesem Standpunkt des Psychologen und Erkenntnistheoretiker PIAGET an. FELLER (1968 Vol. I S. 2) meint:

> "...it is certain that intuition can be trained... in like manner mathematical intuition grows with experience, and it is possible to develop a natural feeling for concepts such as four-dimensional space."

Die dritte Folgerung, die bei PIAGET wohl beinhaltet ist, die er aber nicht eigens thematisiert, auf die jedoch FISCHBEIN (1973, S. 225) Wert legt, besagt, daß Intuition nicht nur denselben Bidlungsmechanismen wie die Intelligenz unterliegt, sondern ein Teil, genauer eine Schicht der Intelligenz[44] ist, wie sie von PIAGET verstanden wird.

3. Stochastische Intuition - Stochastisches Denken

3.1. Stochastische Intuition

Geht man von FISCHBEINs These aus, daß zu jedem mathematischen Wissensgebiet ein intuitives Vorfeld gehört, so ist klar, was mit "probabilistischer Intuition", oder, wie es eher zum heutigen Sprachgebrauch paßt, "stochastischer Intuition" gemeint ist. Es ist einfach die Gesamtheit an intuitiven Modellen, die in stochastischen Situationen verfügbar sind.

---

43) PIAGET in: BETH/PIAGET 1966, S. 222

44) vgl. S. 172

Wie sieht es nun damit aus? Sehr viel dazu ist schon aus Kapitel II dazu beigetragen worden. Wenden wir uns nun, diesmal unter dem gezielten Aspekt der Intuition von neuem der Frage zu, wie es mit der "stochastischen Erfahrung" des Individuums steht.

ENGEL (1971a S. 243) meint lakonisch:

> "...we have a natural geometric intuition but no probabilistic intuition."

FISCHBEIN geht dieser Frage im Detail in einer Unterschung an 12 - 16-jährigen nach, die nie irgendwelchen Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung hatten. Er stellt fest, daß nur für ganz wenige Grundbegriffe ein günstiges intuitives Vorfeld besteht:[45]

> "...les résultats de l'investigation ont montré qu'on peut considérer l'initiation dans la théorie des probabilités comme un terrain intuitif favorable en ce qui concerne les concepts et les procédés suivants: le concept de chance et de mesure de la chance somme rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles, avec pour conséquence 1 comme mesure de la chance de l'événement certain et O comme mesure de la chance de l'événement impossible. A cela s'ajoute le fait que les sujets se rendent intuitivement compte que l'opération par laquelle on détermine la probabilité de la réunion de certains événements élémentaires qui constituent un événement composé est l'addition."

Der letzte Satz bezieht sich wohlgemerkt nur auf Elementarereignisse, die von vornherein als unvereinbar vorausgesetzt sind. Geht es um allgemeinere Ereignisse, versagen die Versuchspersonen.

> "...dans le cas de la règle de l'addition il manque presque complètement la compréhension du caractère composé de certains événements et la nécessité de faire l'inventaire de différentes situations qui réalisent l'événement donné... il s'agit là, non pas simplement de l'absence d'une intuition mais en fait, d'une intuition contrariée."[46]

---

45) FISCHBEIN/BARBAT/MINZAT 1971 S. 227

46) ibid. S. 278

In den gleichen Bereich fallen die Erfahrungen, die man mit Studenten macht, die in die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt werden sollen. Ein sehr häufiger Fehler, der andererseits geradezu verführerisch ist, etwa bei der Aufgabe: bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, mit zwei Würfeln mindestens eine 6 zu werfen! besteht darin, daß gerechnet wird: $p = 1/6 + 1/6$. Man kann sich dieses Phänomen nur dadurch erklären, daß offenbar bei vielen Menschen ein sinn- und funktionsenleertes "Dreisatzschema"[47] für den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine "intuition contrariée" bildet. Das würde bedeuten, daß ein in anderen mathematischen Bereichen durchaus wertvolles Anwendungsschema dem Erwerb stochastischer Intuitionen eher hinderlich sein kann. Geradezu das Paradebeispiel für eine "intuition contrariée" in der Stochastik stellt die Unabhängigkeit von Zufallsexperimenten dar.[48] Selbst Erwachsene, die die Multiplikationsregel kennen und formal wissen, daß die betrachteten Ereignisse unabhängig sind, scheuen sich, nach einer langen "Rot"-serie im Roulette, abermals auf "Rot" zu tippen. Irgendetwas in uns scheint sich dagegen zu sträuben, die Mathematik anzuwenden auf unsere reale Außenwelt. FREUDENTHAL hat bezeichnenderweise einmal gesagt:[49] "... das schönste deduktive System

> der Wahrscheinlichkeitsrechnung garantiert nicht, daß man die Theorie anwenden kann."

Die Unabhängigkeit scheint ein Beispiel für diese Aussage zu sein und gleichzeitig dafür, daß die mathematische Wahrheit, die nicht die "Fortsetzung der entsprechenden Intuition" ist, bisweilen im Kampf gegen letzteres unterliegt. Denn geradezu frappierend ist, daß selbst bedeutende Gelehrte ja sogar Naturwissenschaftler mit dem Phänomen der Unabhängigkeit nicht zurecht kamen.[50] D'ALEMBERT etwa weigerte sich bis an sein Lebensende, zu akzeptieren, daß die Wahrscheinlichkeit für "Zahl" im zweiten Wurf einer Münze, nachdem schon "Zahl"

---

47) vgl. hierzu FREUDENTHAL 1973/74 S. 530
48) vgl. hierzu auch S. 151
49) FREUDENTHAL 1973/74 S. 531
50) COHEN spricht in diesem Zusammenhang von "einem Zwang in uns" (COHEN/HANSEL 1961 S. 38)

im ersten Wurf gefallen war, nach wie vor 1/2 ist. Selbst Einwände von EULER, daß dann alle Münzenwürfe vergangener Jahrhunderte einen Einfluß hätten auf den nächsten Wurf, "so ziemlich das Absurdeste, was sich denken läßt", vermochten ihn nicht in seiner Meinung umzustimmen.[51]
Es wäre auch der Mühe wert, einmal der Frage nachzugehen, wieviele in der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgeklärte Personen jemals einen Lottozettel mit den Zahlen 1 bis 6 abgegeben haben, obwohl diese Kombination bekanntlich die gleiche Chance hat wie jede andere.
Immerhin gaben in meinem schon erwähnten Test[52] auf die Frage 6: Welche Strategie empfiehlt sich beim Lottospielen?

Die Zahlen 1 - 6 anzukreuzen, nur gerade Zahlen anzukreuzen oder aber eine "gemischte Auswahl" zu treffen
a) am besten die Zahlen 1 - 6
b) nur gerade Zahlen
c) gut gemischt
d) ist egal

zwar 75 % die richtige Antwort, indem sie d) ankreuzten. Auf mein Befragen hin erklärten die Studenten fast einstimmig, daß sie dennoch nicht nach der Strategie a) tippen würden. Überhaupt muß man bei solchen Fragen sehr vorsichtig vorgehen. Stellt man beispielsweise die Frage, ob es eine Gewinnstrategie beim Lotto gebe, erhält man im allgemeinen ein allgemeines "Nein!". Fragt man dagegen in der Art von Seite 149, so erhält man deprimierende Ergebnisse, die qualitativ auf dem gleichen Niveau stehen, wie wenn ein Kind die "Fähigkeit" der Lehrerin, eine 6 zu würfeln, höher einschätzt als seine eigene. Das bedeutet: auch der Satz vom ausgeschlossenen Spielsystem, ist weit davon entfernt, ein günstiges intuitives Vorfeld zu besitzen. Auch hierfür ist die Mathematik i. a. keine Fortsetzung der Intuition. Vielmehr ist, um es dramatisch zu formulieren, ein Vertrauensbruch zur gelernten Mathematik entstanden. Denn fragt man die Studenten in mathematischer Form, antworten sie auch mathematisch korrekt.

---

51) CANTOR 1965 S. 222, 225
52) vgl. S. 149

Aber sie denken nicht daran, solche mathematischen Erkenntnisse dann auch in der Realität umzusetzen. Es mag so die Geisteshaltung dahinterstehen: die Mathematik mag ja für sich stimmen, aber die Realität sieht doch ganz anders aus![53]

Das Ganze erinnert ein bißchen an eine von DE MORGAN überlieferte Anekdote.[54]

> "Während einer seiner Vorlesungen über die Quadratur des Kreises vernahm er, wie einer seiner Zuhörer murmelte: 'Soll er mir nur beweisen, daß es unmöglich ist, dann werde ich mich noch heute abend daranmachen, das Problem zu lösen.'"

3.2. Stochastisches Denken

Fast in demselben Maße wie der Begriff "Intuition" wird sowohl von Wahrscheinlichkeitstheoretikern als auch Didaktikern der Terminus "Stochastisches Denken" gebraucht. RENYI (1969 S. 85) spricht von der "eigenartigen Denkweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung", FREUDENTHAL (1973/74 S. 554) von "der eigenartigen Problematik der Wahrscheinlichkeitsrechnung", VARGA (1972 S. 346) von "probabilistic impregnation of thinking", FISCHBEIN[55] von "... un mode de pensée spécifique, experimant une orientation distincte de l'intellecte." Auch ENGEL scheint verschiedene Denkformen, unter anderem die stochastische vor Augen zu haben, wenn er schreibt:

> "We use geometry not in the proper sense of the word (as a branch of mathematics) but as a way of thinking... There are other important ways of thinking; axiomatic thinking, algorithmic thinking, combinatorial thinking and thinking in statistical terms... The student should learn to regard probability not as a branch of mathematics, but as a way of looking at the real world."
> (ENGEL 1971a, S. 243)

Die Frage, die es somit zu beantworten gilt, läßt sich einfach formulieren: Gibt es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

---

53) vgl. die Bemerkungen über Modell und Realität S. 80ff
54) zit. nach COHEN/HANSEL 1961, S. 16
55) in: FISCHBEIN/MINZAT/PAMPU 1969, S. 16

abgesehen von den Inhalten, in denen sie sich natürlich von anderen mathematischen Gebieten unterscheidet, auch typische Vorstellungsweisen, die dem Fach ureigentümlich sind und kaum in anderen Gebieten vorkommen? Erst dann wäre es berechtigt, von einer "besonderen stochastischen Denkweise" zu sprechen.

Teilweise war diese Frage Gegenstand einer Tagung zu Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im Mathematikunterricht in Oberwolfach 1971, auf der sowohl profilierte Wahrscheinlichkeitstheoretiker als auch Fachdidaktiker und Lehrer beteiligt waren. Im Tagungsbericht heißt es:

> "Zu einer teilweise recht lebhaft geführten Diskussion kam es nach der Frage eines Teilnehmers 'Gibt es stochastisches Denken?' Als Antwort wurde herausgearbeitet, daß die adjektivistische Form der Bezeichnung genauso irreführend sei wie 'Theoretische Physik' oder 'evangelisches Gesangbuch'. Stochastisches Denken kann als Analogon zu physikalischem oder geometrisch-anschaulichem Denken gesehen werden. Es kann durch Übung entwickelt werden. Stochastische Modelle sind eine Grundlage stochastischen Denkens..." (SCHMIDT 1971 S.9)

Der letzte Satz erscheint besonders wichtig und soll zusammen mit den Ausführungen von Seite 80ff ergänzt werden.

Es ist ein alter philosophischer Streit, ob es die Wirklichkeit an sich gibt - wie die Platonisten sagen -, von der wir allerdings nur die 'Bilder' oder 'Schatten'[56] sehen oder aber, ob wir nicht vielmehr die "Wirklichkeit" selber konstruieren, - mit unseren Handlungen, unseren Sinneseindrücken[57] und unserem Geiste. Der letzteren Ansicht kann man etwa PIAGET, aber auch BRUNER zurechnen, was ganz deutlich in solchen Aussagen wie der folgenden zum Ausdruck kommt:

> "...daß unser Wissen von der Welt auf einem konstruierten Modell der Wirklichkeit beruht..." (BRUNER 1971, S. 377)

Unabhängig davon, welchen Standpunkt man einnimmt, die Wirk-

---

56) vgl. das Höhlengleichnis von PLATO

57) hier wäre etwa auch an die Selbstversuche von I. KÖHLER zu denken, in denen er sich Brillengläser aufsetzte, die 'Oben' und 'Unten' vertauschten.

lichkeit ist jedenfalls so komplex, daß sie nur partiell mit Hilfe von Modellen in den Griff zu bekommen ist. Ob nun die Wirklichkeit auf Modelle abgebildet wird[58], wie etwa SCHRAMM ausdrück:[59]

> "Diese Abbilder, die Modelle, geben Leitlinien für das Handeln der Praxis; ihre Brauchbarkeit erweist sich, wenn das Handeln erfolgreich war."

oder wir vielmehr die Realität mit Hilfe von Modellen prägen, ist weitgehend Interpretationssache. Im Grunde braucht zwischen den beiden Standpunkten auch kein Widerspruch zu bestehen, wenn man auch im "Abbilden" den aktiven Konstruktionsprozess des Individuums sieht. Dagegen scheint ein Standpunkt, der Modelle als Abstraktionen aus der Wirklichkeit sieht, inadäquat zu sein, ja sogar absurd, wenn man an solche Modellvorstellungen wie die quantentheoretischen der modernen Atomtheorie denkt. Deswegen werden hier Regeln, Sätze und Hypothesen durchgängig als Teile von Modellen angesehen, die unser Denken konstruiert.

Das Besondere der Stochastik besteht nun darin, daß kein anderes Gebiet in demselben Maße von Modellvorstellungen und Modellannahmen beherrscht wird.[60] Zwar ist auch die euklidische Geometrie ein Modell der Wirklichkeit. Im Grunde genommen wird jedoch hier die Standardinterpretation: "Physikalischer Punkt $\longleftrightarrow$ euklidischer Punkt" vom Individuum als die natürliche angesehen. Es gibt im allgemeinen keine Interpretationsschwierigkeiten. Ganz anders liegt der Fall in der Stochastik. Ob man Anfangswahrscheinlichkeiten festlegt, oder Zufallsexperimenten Ereignisräume zuordnet, in der Kombinatorik sich überlegen muß, ob es sich um unterscheidbare oder nicht unterscheidbare Objekte handelt, bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten[61] festsetzt, welche Größen als 'gleichverteilt' zu gelten haben, in der Statistik, welche

---

58) der Mathematiker würde vielleicht "homomorphe" Abbildung sagen
59) SCHRAMM 1974, S. 1
60) vgl. FREUDENTHAL 1961 S. 80f
61) vgl. BERTRANDsches Paradoxon S. 24

Hypothesen man aufstellt, welche Faktoren eines psychologischen Modells wohl relevant sind und welche Verteilungen man zu Grunde legt - stets muß man sich, oft nach heuristischen Gesichtspunkten überlegen, welche zur Verfügung stehenden Modelle wohl am ehesten den realen Sachverhalt approximieren. Der Statistiker D. W. MÜLLER sieht in der angewandten Mathematik, und hier wohl in der Stochastik, am "deutlichsten einen Grundzug mathematischen Denkens", nämlich die "distanzierte Rationalität" verwirklicht und meint damit:

> "Damit ist ein Verhalten gegenüber Sachgegebenheiten gemeint, das sich nicht von deren etwaigen oder vermeintlichen Eigengesetzlichkeiten leiten läßt, sondern ihnen mit Entwürfen des Verstandes in der Form von Modellen, Hypothesen, Arbeitshypothesen, Definitionen, Folgerungen, Alternativen, Analogien, also sozusagen "aus der Distanz", in der Weise partiellen, vorläufigen, approximativen Wissen, gegenübertritt." (D. W. MÜLLER 1974, S. 167)

So gesehen ist also nur der Grad des Modellgebrauchs typisch für die Stochastik, und die Unterscheidung: stochastisches Denken - geometrisches Denken ist nur vom Inhalt der zugrundeliegenden Problemsituationen zu sehen, d. h. nur graduell, aber nicht prinzipiell, sind Unterschiede vorhanden. Somit ist geometrisches Denken das Anlegen geometrischer Modelle, stochastisches Denken das Anlegen von stochastischen Modellen an reale Situationen.

Nun ist es auch nicht verwunderlich, daß es in der Stochastik Vorgehensweisen gibt, die in keiner anderen mathematischen Disziplin anzutreffen sind. Im allgemeinen gibt man sich in der übrigen Mathematik Ausgangsgrößen vor und berechnet mit Algorithmen eindeutig Folgedaten oder Mengen von Folgedaten. Hier macht auch die rein mathematische Maß- bzw. Wahrscheinlichkeitstheorie keine Ausnahme. Es kommt auch wohl häufig vor, daß man auf heuristischem Wege mathematisch noch nicht bewiesene Aussagen als Hypothesen formuliert und sie nachträglich als Sätze beweist, oder durch Gegenbeispiele zeigt, daß sie falsch sind. In der Statistik ist das anders! Hier gibt man sich beispielsweise oft eine Nullhypothese H_o

und eine Alternativhypothese H_1 vor[62], zu denen man oft auf heuristischem Wege, gestützt durch Erfahrungsdaten, gekommen ist. Das Besondere an der statistischen Methode ist nun, daß man keineswegs eine der Hypothesen verifiziert oder falsifiziert, wie es in der sonstigen Mathematik üblich ist. Beides ist aus prinzipiellen Gründen unmöglich. Vielmehr fragt man sich etwa, ob die Nullhypothese mit dem Zufall noch in Einklang gebraucht werden kann, welch letzteres man durch ein Signifikanzniveau, etwa 5 %, festlegt. Vermutlich ist es dieser Tatbestand, der die Statistik für so viele als höchst schwierig erscheinen läßt.
Noch ein anderer Punkt verdient an dieser Stelle Beachtung. Man muß sich davor hüten, nur das als Modell anzusehen, was formalisiert ist. Vielmehr können Modelle durchaus intuitiven Charakter haben. Wenn ein Kind sagt, daß beim Regenfall auf zwei Pflastersteine jeder Stein abwechselnd einen Tropfen bekommt, etwa mit der Begründung, daß jedes seinen Teil haben soll[63], so liegt hierin eine moralische Begründung. Das Kind, auch wenn es ihm nicht bewußt ist, scheint an eine höhere moralische Instanz zu glauben, die darüber wacht, daß alles streng gerecht zugeht. Dies ist ein höchst einfaches, deterministisches - im übrigen sicher nicht rein aus der Erfahrung abgeleites - intuitives Erklärungsmodell für das Phänomen des "kollektiven Zwangs". In einem solchen Weltbild gibt es keinen Zufall und auch keine "individuelle Freiheit". Im Grunde genommen vollzieht sich erst durch das Akzeptieren des Zufalls der entscheidende Schritt "von magischen und mythischen Vorstellungsweisen zu rational-kausalen Erklärungen".[64] Genau den gleichen Sachverhalt drückt PIAGET aus, wenn er sagt:[65] "En effet le hasard est la négation du miracle". Den Zufall deutet PIAGET aber als einen operativen Begriff, der über die kombinatorischen Operationen konstruiert wird. Jemand, der

---

62) vgl. S. 75f
63) vgl. Seite 116
64) vgl. HENTIG 1969, S. 35
65) PIAGET/INHELDER 1951, S. 108

diesen Konstruktionsprozess schafft, hat sein magisch geprägtes Weltbild durch ein stochastisches ersetzt.
Auf Grund der späteren Befunde von COHEN (1957) und FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1967 scheint mir diese Deutung zu eng und nicht die volle Problematik abzudecken. Ob das Individuum von vornherein darauf ausgerichtet ist, nur eindeutige Lösungen, Gründe, Kausalursachen zu suchen und zu akzeptieren, ist eher eine gefühlsmäßige weltanschauliche Haltung. Wir haben auf Seite 145 schon darauf hingewiesen, daß sich durch den einseitigen Drill im Unterricht eine einseitige Orientierung zum kausal-deterministischen einschleift. Im Grunde geschieht dieser Drill aber schon früher, nämlich wenn das Kind auf grundsätzlich jede "Warum"-frage einen wohlbestimmten Grund, d. h. ein deterministisches Erklärungsmodell vorgesetzt bekommt. Von diesem Aspekt her wäre es wohl besser für das Kind, wenn Eltern öfter auf Scheinbegründungen verzichten würden, selbst auf die Gefahr hin, dadurch etwas von ihrer für das Kind "allwissenden" Funktion zu verlieren. Man sollte diese etwas ausführlich geschilderte weltanschauliche Komponente mitsehen, wenn man von "stochastischem Denken" spricht.
Intuitive Modelle können trotz ihrer nichtformalen Natur auch durchaus adäquat sein. Wenn ein Kind, die Chance, beim Würfeln mit zwei Würfeln die Augensumme 7 zu erzielen, höher einschätzt als die Chance, die Summe 2 zu erzielen, weil es sich etwa im Lauf eines Spiels klar macht, daß es für 7 mehr Möglichkeiten gibt, so hat es ein höchst wirksames intuitives Erklärungsmodell gewonnen, das zwar komparativer, aber nicht quantitativer Natur ist. Die Fortsetzung zu einem elaborierteren Modell, in das es etwa auch noch die Zahl der günstigen Möglichkeiten einbezieht, ist gegeben. Im Zusammenhang mit der "Curriculumspirale" wird Gelegenheit sein, darauf zurückzukommen.

Fassen wir die Betrachtungen zum "Stochastischen Denken" thesenartig zusammen.

1. Stochastisches Denken ist Anlegen von stochastischen Modellen, die verschiedene Formalisierungsgrade haben können.
2. Von einer "eigentümlich stochastischen Denkweise zu sprechen, ist man nur insofern berechtigt als:
   a) die Möglichkeiten, die Realität durch Modelle zu interpretieren, in der Stochastik vielfältiger und mehrdeutiger sind als in allen anderen mathematischen Disziplinen
   b) das methodische Vorgehen, das bei Hypothesenprüfungen zum Zuge kommt, der Statistik ureigentümlich ist.
   c) der Grad der nötigen "distanzierten Rationalität" höher ist als in anderen mathematischen Disziplinen.
3. Stochastisches Denken läßt sich nicht auf mathematisches Denken reduzieren, sondern trägt eine starke, weltanschauliche Komponente.

Daß so viele Menschen wohl mit geometrischen Situationen fertig werden, aber schlecht mit Zufallsphänomenen zurechtkommen, liegt an den folgenden Gründen:

1. daß sie zu wenige, teilweise inadäquate stochastische Modelle konstruiert haben bzw. gelehrt wurden und sie oft nicht kritisch an der Realität überprüft haben.
2. daß die Intuitionen, die der späteren Modellkonstruktion zugrundeliegen, sich in falsche Richtung ausbildeten und zu "intuitions contrariées" wurden.
3. daß sie wohl über adäquate formale Modelle verfügen, sie aber an die Realität nicht anlegen können[66] oder wollen.[67]
4. daß sie einseitig auf ein streng deterministisches Weltbild gedrillt wurden.

---

66) vgl. FREUDENTHAL 1973 S. 553 "Die Sorgen entstehen eben erst dann, wenn man die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden will."

67) vgl. Seite 179

4. Die Curriculumspirale

Die bisherigen didaktischen Ansätze zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe (so wie auch Vorlesungen und Lehrbücher auf Hochschulebene) setzen ein günstiges intuitives Vorfeld voraus. Die bisherigen Überlegungen zeigen aber, das "stochastische Intuition" und "stochastisches Denken" (einschließlich der geschilderten einseitigen Orientierung) von frühester Kindheit an einer stetigen Strukturierung und Konsolidierung unterliegen. Wie wir gesehen haben, kann diese Strukturierung, wenn man sie sich selbst überläßt, in eine ungünstige Richtung verlaufen. Wenn daher der Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lange hinausgeschoben wird, besteht die Gefahr, daß sich in der Zwischenzeit inadäquate Intuitionen ("intuitions contrariées") bilden, die den Lernprozeß in dem dann einsetzenden mehr analytisch-formalen Unterricht behindern. Es ist illusorisch zu glauben, solche inadäquaten Intuitionen (bei 12-jährigen Kindern wie auch bei Erwachsenen), die Jahre zu ihrer Entwicklung brauchten, könnten durch relativ kurze Übung und experimentelles Spielen im Unterricht zurückgedrängt werden.

Somit erscheint es geboten, zu versuchen, die Stochastik schon in den ersten Grundschulklassen in adäquater Weise, also vor ihrer formalen Behandlung, "anzureißen" ("Präfigurationsprinzip"), um ein günstiges (und nicht nur hinderliches) intuitives Terrain in der Primar- & Orientierungsstufe für eine spätere systematischere Behandlung der Stochastik anzubahnen. Vor allem bei ENGEL (1971) und FISCHBEIN u. a. (1971) kommt diese Zielsetzung klar zum Ausdruck:

FISCHBEIN: "...l'enseignement d'une discipline devrait être précédé de la prospection du terrain intuitive."[68]

ENGEL: "Therefore it is essential to develop the proper feeling for probability. The students get acquainted with random phenomena in many different settings through typical examples. If this intuitive background

---

68) FISCHBEIN u. a. 1971 S. 265

> is missing, probability becomes a meaningless game... I do not want to teach formal theory in isolation for some short period of time. Rather I want to change radically and permanently the thinking of the students. Such change can be best achieved if we start when the student is very young and his thinking habits have not yet become fixed..." (ENGEL 1971a S. 244)

Vor einer praktischen Verwirklichung solcher Vorhaben sind jedoch allgemein wichtige Fragen zu beantworten, wie:

1) Welche Wissensgebiete sind überhaupt relevant und verdienen es, präfiguriert zu werden?
2) Nach welchen Kriterien sollen bestimmte Teile von Wissensgebieten für die Präfiguration ausgewählt werden?
3) Welches sind die praktischen Möglichkeiten, um Wissensgebiete in frühem Stadium vorzubereiten, d. h. anders ausgedrückt, - um beim Schüler frühe, adäquate intuitive Modelle hervorzubringen?

ad. 1 Diese Frage ist durchaus von gewisser Brisanz. Das Präfigurationsprinzip wird seit einigen Jahren als Argument eingesetzt, auch "Topologie" oder "Gruppentheorie" oder so etwas schon fast als banal erachtetes wie Mengenlehre in der Grundschule vorzubereiten. Vom Argument der rein quantitativen stofflichen Überfülle abgesehen, das vor allem von Lehrern vorgebracht und von LENNÉ (1969 S. 289) als "didaktisches Quantitätsproblem" thematisiert wird, können auch die Warnungen von schon als traditionell angesehenen Fachdidaktikern wie KARASCHEWSKI und MESCHKOWSKI nicht einfach vom Tisch gewischt werden.

> "...Es ist schon vorgeschlagen worden, auch 'Wahrscheinlichkeitsrechnung' in der Grundschule zu treiben. Und es gibt gewiß viele weitere Möglichkeiten, aus den mathematischen Wissenschaften einzelne Problemstellungen herauszugreifen und sie in den Anfangsunterricht hineinzunehmen. Aber wozu? Hat es Sinn, immer mehr Rosinen aus

> dem großen Kuchen herauszusuchen und sie in den ersten Schuljahren zu servieren. Es besteht doch die Gefahr, daß sich die Kinder dabei den Magen verderben..." (MESCHKOWSKI 1972 S. 12)

Letzten Endes wird hier die Frage nach notwendigen Prioritäten aufgeworfen, die sicherlich nicht von einer Theorie des Stochastikunterrichts, ja noch nicht einmal von einer allgemeinen Unterrichtstheorie beantwortet werden kann, sondern der Messung an höheren Lernzielen wie etwa denen V. HENTIGs (1969) bedarf. Dabei kann man keinen "Beweis führen", sondern kann nur argumentieren - wobei ich als zugkräftiges Argument für einen frühen Stochastikunterricht die unmittelbare Lebensrelevanz auf allen Altersstufen sehe und außerdem die ganz besonders in der Stochastik ausgeprägte Problematik der inadäquaten Intuitionen. Auf Grund dieser Argumente muß man sich entscheiden, etwa wie BRUNER der seine Entscheidung etwas vorsichtig als Hypothese formuliert:

> "Betrachtet man das Verständnis von Zahl, Maß und Wahrscheinlichkeit als unumgänglich für die Beschäftigung mit exakter Wissenschaft, dann sollte die Unterweisung in diesen Gegenständen so geistig-aufgeschlossen und so früh wie möglich beginnen..." (BRUNER 1970 S. 62 -Übersetzung von mir-)

ad. 2 Nach dieser Entscheidung besteht der nächste Schritt darin, fundamentale Ideen, Probleme und Verfahren des betreffenden Wissensgebietes herauszukristallisieren. Einen Ansatz für die Stochastik haben wir im I. Kapitel gemacht, wobei ich wesentlich von einer sachlich - mathematischen Analyse aus Entscheidungen getroffen habe. Allerdings muß an dieser Stelle auch gesagt werden: allein von der vorpädagogischen Sachanalyse sind solche Entscheidungen sicher nicht getragen. Jeder, der eine Liste von fundamentalen Ideen aufstellt, geht schon mit einer bestimmten Mathematikphilosophie an ein solches Vorhaben heran. Daß ich z. B. das Urnenmodell als fundamentale Idee in meine

Liste aufgenommen habe, lag nicht daran, daß das Urnenmodell etwa als mathematischer Begriff eine Rolle in der Mathematik spielt, sondern eher daran, daß es von einer starken veranschaulichenden Kraft ist und zumindest unbewußt auch von Mathematikern ständig verwendet wird.

ad. 3 Diese Frage kann nur auf dem Hintergrund der psychologischen Modellvorstellungen beantwortet werden, die BRUNER sich im Bereich der kognitiven Entwicklung gemacht hat. Er geht davon aus, daß es prinzipiell drei Repräsentationsmodi gibt, um Wissensdinge darzustellen oder aber zu erarbeiten:
den "enaktiven",
den "ikonischen"
und "symbolischen" Modus.
Ein Paradebeispiel hierfür sind Permutationen, die auf enaktive Weise durch Legotürme dargestellt, auf ikonische Weise durch Baumdiagramme und auf symbolische Weise durch bijektive Abbildungen auf einer endlichen Menge beschrieben werden können.
Das ständige Zusammenwirken dieser drei Modi ist die treibende Kraft in der geistigen Entwicklung des Menschen und hat grundsätzlich in jedem Lebensalter Bedeutung:

> "Unser Ausgangspunkt ist daher ein menschlicher Organismus mit Fähigkeiten der Weltdarstellung gemäß drei Modi, von denen ein jeder durch das Wesen der menschlichen Funktion, in denen sie sich verwirklichen, beschränkt ist. Wir sehen den Menschen im Prozeß der Internalisierung des Tuns, des Vorstellens und des Symbolisierens heranwachsen. Diese Darstellungsformen "existieren" in seiner Kultur. Sie sind Verstärker seiner Kräfte. Er entwickelt sie in einer Weise, die die Verwendungszwecke widerspiegeln, denen er sein eigenes Leben unterwirft. Die Entwicklung dieser Kräfte, so scheint mir, hängt in hohem Maße von drei Gegebenheiten ab. Die erste bezieht sich auf das Vorhandensein von "Verstärkern", die eine Kultur zur Verfügung stellt - Bilder, Fertigkeiten, Konzeptionen usw. Die zweite Gegebenheit ist die Art des Lebens, das das Individuum führt, die An-

> forderungen, denen es unterworfen ist. Die dritte (und spezifischste) Gegebenheit betrifft das Maß, in dem das Individuum angeregt wird, die Quellen der Übereinstimmung und der Diskordanz zwischen den drei Modi des Wissens, der Handlung, dem Bild und dem Symbol, zu explorieren." (BRUNER 1971 S. 379)

Keineswegs darf man den ersten Teil des Zitats so interpretieren, daß das kleine Kind nur enaktiv vorgeht und der Erwachsene sich nur noch auf symbolischer Ebene bewegt. Eher ist FISCHBEINs Deutung zuzustimmen, daß die drei Modi abwechselnde Dominanz besitzen, d. h., daß das Kind vorwiegend auf enaktivem Niveau "argumentiert" und der Erwachsene mehr auf symbolischer.[69]

Diese aufeinanderfolgende Dominanz steckt auch im BRUNERschen Spiralmodell. Danach stehen am Anfang der Erarbeitung eines Wissensgebietes konkrete Aktionen - oft auch beim Erwachsenen. Mit zunehmender Entwicklung werden spezielle Aktionen immer weniger wichtig und zusammengefaßt im vorstellenden Bild.[70]

Nachdem im frühen Entwicklungsstadium mit Hilfe von Aktion und Bild intuitive Modelle erstellt sind, kann das Individuum in einem späteren Stadium dasselbe Thema wieder aufgreifen und dann sicherer auf symbolischer Ebene operieren und immer mehr - aber wohl nie ganz - auf die "ikonische Krücke" verzichten. So windet sich der intellektuelle Weg von der niederen - der intuitiven - bis zur höchsten - der symbolischen - Ebene.[72] Das "Spiralprinzip" besagt nichts anderes, als daß der Unterricht bei einer Konstruktion von Curricula in derselben Weise spiralig vorgehen soll. Auch wenn

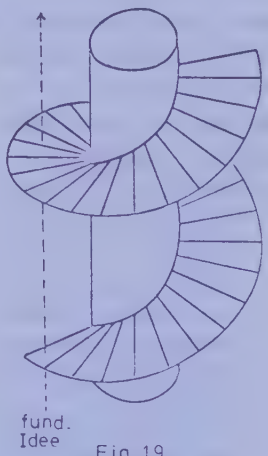


Fig.19

69) vgl. FISCHBEIN 1969 S. 292
70) BRUNER 1967 S. 13 "Images are great summarizers...of action...
71) Zeichnung nach GRAF/BARNER Darstellende Geometrie. 1967
72) vgl. die Aussage von D. W. MÜLLER, daß "... Mathematik die Fortsetzung der Intuition mit anderen Mitteln..." ist.

die Effizienz dieses Prinzips sich eigentlich nur in einem langjährigen Unterricht erweisen kann, scheint sich sein Wert schon in relativen kurzen Unterrichtseinheiten zu zeigen. FISCHBEIN u. a. berichten von einem Unterrichtsversuch über Permutationen mit Hilfe konkret-ikonischer Materialien (Spielkarten, Baumdiagramme) bei Kindern des konkret-operatorischen Stadiums und kommen dabei zum Schluß:

> "Our findings suggest, we hope, something more: the possibility for the child to attain systematically, yet at the concrete operational stage, a body of knowledge and mental skills and intuitions concerning combinatorial analysis." (FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1970a S. 270)

Um Mißverständnisse zu vermeiden, kann nicht oft genug der folgende Punkt betont werden: die Spiralität eines Curriculums im Sinne BRUNERs ist keineswegs nur eine inhaltliche, die eben darin bestehen könnte, daß ein und derselbe Stoff immer wieder mit verschiedenem Schwierigkeitsgrad neu aufgerollt wird, sondern vor allem eine "darstellungsmäßige".[73] Auf die Dauer geht nach BRUNER der Unterricht optimal vor, der diese doppelte Spiralität konsequent in den Unterrichtsprozeß und die Curriculumplanung überhaupt einbezieht. Der Gedanke der Curriculumspirale ist inzwischen weltweit akzeptiert. Für den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man eine Spielart in den "Goals for school mathematics."

> "Probability. Both programs include several rounds of probability. It is presupposed that the student will have as a first round an intuitive concept of the probability of an event from the pre-mathematical material in the lower grades..."

Im Grunde ist OEHLS Theorie der "konzentrischen Kreise" auch nicht anders als ein spiraliger Aufbau der Bruchrechnung. Überhaupt würde man BRUNER zu viel Ehre erweisen, würde man ihm den Gedanken der "Curriculumspirale" original zuschreiben. Ebensowenig neu ist auch die Verwendung geeigneter Materialien wie "homogene Plättchenmengen", Rechenbänder oder Bruchscheiben, die schon immer eine wichtige Rolle im Mathematik-

---

73) im Sinne der drei Darstellungsmodi

74) 1963 S. 49

unterricht gespielt haben. Allerdings hatten in der traditionellen Mathematikdidaktik solche Materialien doch eher den Charakter von reinen Veranschaulichungen symbolischer Sachverhalte und waren oft eine Art "Feuerwehr", wenn der lehrer das Gefühl hatte, daß er die Fassungskraft seiner Schüler überstrapaziert hatte. Genau an diesem Punkt liefert BRUNER die entscheidenden neuen Aspekte für die konsequente Verwendung von enaktiv-ikonischen Materialien.
Zum einen besitzen sie in BRUNERs Konzeption, abgesehen von ihrem Veranschaulichungscharakter einen eigenen konstruktiven Stellenwert, indem sie dazu verhelfen, intuitive Erklärungsmodelle zu erstellen, mit denen schon Vorschul- und Grundschulkinder ihre Umwelt mit eigenen Mitteln begreifen - lange bevor sie die Elaboriertheit und Komplexität der zugrundeliegenden mathematischen Begriffe erahnen. Zum anderen sieht BRUNER nicht nur die psychologische Adäquatheit, sondern im selben Maße auch die mathematische. Die Darstellung auf enaktiv-ikonischer Ebene muß "... in einer intellektuell ehrlichen Weise..." geschehen. Durch die Elementarisierung darf keine Verfälschung des betreffenden Sachverhalts eintreten. Vielmehr muß das Prinzip der Fortsetzbarkeit beachtet werden[75], damit Mathematik wirklich "eine Fortsetzung der Intuition mit anderen Mitteln" sein kann.[76] Vom Inhaltlichen her ist diese angestrebte Kontinuität durch die fundamentalen Ideen gesichert, die sich als Leitstränge von unten nach oben durch

---

75) hier ist weniger in der Mathematik als in anderen Fächern in der Vergangenheit viel gesündigt worden. Z. B. wurde bis vor wenigen Jahren noch im Physikunterricht für die Begriffe "Spannung" "Stromstärke" und "Widerstand" das nichtfortsetzbare Erklärungsmodell der Flüssigkeitsströmung zwischen zwei verschiedenen Höhen verwendet, ein Modell, das inzwischen als "verfälschend" abgelehnt wird.
Ein weniger extremes Beispiel ist bei KOßWIG (o. Jahr a) S. 9) zu finden, wenn er vorschlägt, im Rahmen eines propädeutischen Wahrscheinlichkeitskurses Sextaner ins Merkheft eintragen zu lassen: "Definition: Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, das beliebig oft unter gleichen äußeren Bedingungen wiederholt werden kann und dessen Ausgang nicht vorhergesagt werden kann."

76) vgl. S. 171, 190

die Curriculumspirale hindurchziehen. Im übrigen läßt sich die curruculare Bedeutung der fundamentalen Ideen auch noch in der folgenden Weise interpretieren: Stellt man sich das Repertoire an kognitiven Schemata, mit denen der Mensch mit der Umwelt interagiert, als Netz vor - BRUNER spricht selber öfter vom "kognitiven Netzwert"[77], so gibt es für den Bau solcher Netze, maßgeblich unter dem Einfluß des Unterrichts, verschiedene Möglichkeiten, von denen ich zwei gegensätzliche Positionen skizziere:

(1) Man baut das Netz schrittweise von Masche zu Masche auf. Das bedeutet, daß man vor allem auf die innermathematische Beziehungshaltigkeit Wert legt und dabei in Kauf nimmt, erst recht spät mit einem kohärenten System der Umwelt gegenübertreten zu können. Für die Stochastik würde das bedeuten, daß man zunächst Mengenlehre, Aussagenlogik und Bruchrechnen treibt und sich dann erst stochastischen Situationen zuwendet.[78]

(2) Man baut zunächst das Netz grob auf aus den Hauptsträngen (= Leitideen =) und verfeinert von Durchgang zu Durchgang (=spiralig=) das Netz über Nebenstränge bis zu den Maschen. D. h. die Maschenstruktur (= innermathematische Beziehungshaltigkeit=) kommt erst spät.[79]

BRUNER hat sich klar für die zweite Konzeption entschieden, weil nur so gewährleistet ist, daß in jedem Entwicklungsstadium zwar grobe, aber adäquate Erklärungsmodelle für die relevanten Phänomene der Umwelt zur Verfügung stehen. Diese Auffassung ist kein rigider Utilitarismus und beinhaltet auch nicht, daß man "isolierte Brocken" unterrichten soll,

---

77) vgl. BRUNER 1971 S. 384

78) ein dieser Vorgehensweise nahekommendes Beispiel ist etwa KOßWIG o. J.

79) Beispielhaft hierfür sind die Publikaticnen von ENGEL (vgl. Ausführungen dazu auf S. 209f)

vielmehr fügt sie sich nahtlos ein in unsere Ausführungen zum Verhältnis zwischen Theorie und Realität, das wir als "lokale Approximation" gedeutet haben. Bezeichnend sind in diesem Zusammenhang die Ausführungen von FREUDENTHAL (1973 S. 77f):

> "Will man zusammenhängende Mathematik unterricht, so muß man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muß sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das -ich meine die Wirklichkeit- ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt, und wenn es erst scheinbar zusammenhanglose Elemente der Mathematik sein mögen, so erfordert es Zeit und Reifung, die Beziehungen zwischen ihnen zustande zu bringen."

Unausgesprochen steckt dahinter die PIAGETsche Gleichgewichtsthese, die u. a. besagt, daß der menschliche Organismus sich bei der Auseinandersetzung mit der Umwelt innerlich von selbst zu einem kohärenten System organisiert, wenn man ihm Zeit dafür läßt.

5. Bedeutung didaktischer Prinzipien in einem frühen Stochastikcurriculum

Das BRUNERsche Spiralprinzip macht die bekannten für den Mathematikunterricht sich als schon relevant erwiesenen didaktischen Prinzipien, wie sie etwa aus der PIAGETschen Psychologie entwickelt worden sind, nicht überflüssig, sondern stellt sie in einen allgemeinen curricularen Rahmen. Bei der Planung eines Stochastikcurriculums ist deswegen zu fragen, ob und inwiefern in anderen mathematischen Gebieten bewährte Prinzipien auch für die Stochastik wichtig sind.

Eines der wichtigsten Prinzipien der NEW MATH besteht im "Unterricht durch Entdeckung". Das Prinzip ist u. a. durch SCOTT (1966), KEISLAR/SHULMAN (1966), FISCHBEIN (1969), DIENES/GOLDING (1970 begründet worden und hat seine Bewährungsprobe im Mathematikunterricht längst bestanden. Regeln (d. h. Modelle) sollten als natürlicher Ausfluß vom selb-

ständigen Experimenten an geeigneten Beispielen sich selbst nach und nach "sui generis" konstruieren. Eine Regel mit einem Beispiel zu erläutern und dann auf weiteres Beispielmaterial anzuwenden, skizziert FREUDENTHAL (1963b S. 36) recht sarkastisch:

> "Ce qui devrait être le point de départ apparaît après coup sous le titre d'applications. On fait un desert non digérable de ce qui aurait été bon comme hors d'oeuvre."

Es erscheint beispielsweise vom obigen Prinzip her gesehen, optimal, bei der Aufgabe, wie groß die Wahrscheinlichkeiten beim doppelten Münzenwurf ist oder ähnlichen Aufgaben, so vorzugehen, daß aus zwei Beuteln mit je 100 Steinen (ein Beutel mit blauen, ein Beutel mit roten) Paare gezogen werden. Die roten Paare werden links hingelegt, die blauen rechts, die gemischten in der Mitte. Die Kinder, nach allem, was wir aus den entwicklungspsychologischen Befunden wissen, werden anfänglich auf Gleichverteilung tippen und erst im Laufe der Zeit die frappierende Entdeckung machen, daß der Haufen in der Mitte fast doppelt so groß wird wie der am Rande.

Die Bedeutung der Variation für Begriffelernen (GAGNÉ 1969, DIENES/GOLDING 1970) ist unumstritten. Manchmal bringt es jedoch nichts, wie FREUDENTHAL (1973) zeigt, durch ein Überangebot an Beispielen Erkenntnisse besser einzuschleifen. Vielmehr genügen oft wenige paradigmatische Beispiele für das Grundschulkind. Es erscheint deswegen nicht sehr effektiv, im Klassenversuch die Stabilität der relativen Häufigkeiten sowohl für Münzen, als auch Urnenziehungen, als auch Spinner und Würfel nachzuweisen. Vielmehr ist hier ein anderes Prinzip anzuwenden, das darin besteht, Strukturzusammenhänge und Isomorphismen auszunützen, die auch ständig in der Praxis eine Rolle spielen.[89] Beispiele hierfür sind auf höherer Ebene das Verfahren, Ruinprobleme bei Glücksspielen auf Irrfahrten

---

80) vgl. FREUDENTHAL 1973/74 S. 538

in der Ebene zu verlagern[81] oder bei Aufgaben, wo es darum geht, Wahrscheinlichkeiten auszurechnen dafür, daß mindestens einmal die "6" fällt, den Kunstgriff zu verwenden, daß man die Wahrscheinlichkeit für das Komplementärereignis berechnet. Auf Grundschulebene können solche Isomorphien angewandt werden beim Wahrscheinlichkeitsvergleich einer bestimmten Zahl mit dem Würfel oder aber einen beliebigen Pasch mit zwei Würfeln zu werfen. Ein noch elementareres Beispiel, das erfahrungsgemäß auch für Erwachsene von hohem Erkenntniswert sein kann, ist die Isomorphie bei Aufgaben zum doppelten Münzenwurf und Aufgaben zum Zahlenverhältnis von Jungen und Mädchen[82] in Familien.

Die Bedeutung des operativen Prinzips ist von FRICKE (1968) für den Bereich der Arithmetik überzeugend nachgewiesen worden. Daß es auch im Wahrscheinlichkeitsunterricht eine wichtige Rolle spielen kann, sei an folgendem Beispiel gezeigt: Wir betrachten zwei Urnen mit weißen und schwarzen Kugeln.

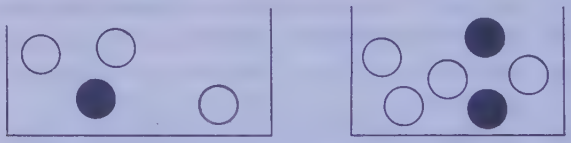


Fig 20

Es sollen die Wahrscheinlichkeiten (oder die Chancen) verglichen werden, eine schwarze Kugel zu ziehen. Dazu beginnen wir mit operativen Übungen der folgenden Art: wie ändert sich die Chance bei der ersten Urne, wenn schwarze Kugeln dazukommen, wenn weiße dazukommen, wenn ich die Urne schüttle? Wie ändert sich die Chance, wenn ich bei der zweiten Urne eine schwarze Kugel wegnehme? Wie ändert sich die Chance, wenn ich die (Plastillin)-kugeln halbiere? Die Urnen werden nach obigen Vorbereitungen neu organisiert, etwa so:

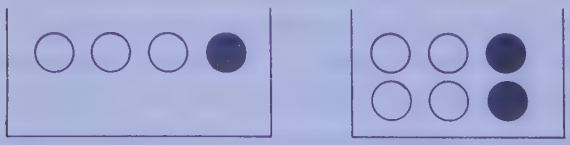


Fig.21

81) vgl. FELLER 1968 VOL. 1 S. 348f

82) daß die Wahrscheinlichkeiten für eine Knaben- bzw. Mädchengeburt von 1/2 signifikant verschieden sind, ist nicht sehr schwerwiegend.

Die Kinder gelangen durch solches Vorgehen in den Experimenten von FISCHBEIN u. a. zu so vernünftigen Urteilen, wie:

> "C'est plus facile de tirer une bille blanche dans la première boîte, parce qu'il y a 3 billes blanches pour une bille noire tandis que dans l'autre il n'y en a que deux blanches pour une noire." (FISCHBEIN 1969 S. 299)

Von ähnlich großer Wichtigkeit ist das Integrationsprinzip, das im wesentlichen darin besteht, Zusammenhänge herauszustellen und auszunützen. Da die Wahrscheinlichkeitsrechnung von ihrem Aufbau und ihren Anwendungen her so außerordentlich eng verzahnt ist mit der Arithmetik, der Logik, der Mengenlehre und der Geometrie, erscheint eine permanente Synthese dieser Gebiete mit der Stochastik naheliegend, vom Problem der didaktischen Stoffhülle her gesehen, sogar als unumgänglich. Es wird also besonders darauf zu achten sein, ob es ohne weiteres, wie ENGEL (1966b S. 5) schreibt, möglich ist, alte Aufgaben in Schulbüchern durch neue mit stochastischem Inhalt auszutauschen.

Die "integrative Kraft"[83] erweist sich deutlich an solchen "Verdichtungszonen" wie der folgenden Aufgabe, die verschiedene mathematische Aspekte beinhaltet:

Hans und Peter würfeln. Hans tippt auf 1 oder 2, Peter tippt, daß nicht die 5 kommt. Hier treten in ein und derselben Situation eine ganze Reihe von logiko-mathematischen Aufgaben und Begriffen auf z. B.: logische Konjunktion und Negation, Aufzählung von Gewinnzahlen, logische Implikation, Angabe von Gewinnmengen, Mengeninklusion, so daß man hier mit WINTER[83] einen Vergleich "zum tapferen Schneiderlein" ziehen kann, der auch "mehrere Fliegen mit einem Streich" traf.

---

83) nach WINTER (persönl. Gespräch)

Weitere wichtige didaktische Prinzipien wie das dynamische Prinzip, das Redundanzprinzip, das Prinzip der Förderung des intermodalen Transfers und das Stabilisierungsprinzip [84] sollen in Kapitel IV zur Sprache kommen, wo ich weitere Aktivitäten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung systematisch in einer Gesamtschau diskutiere.

84) vgl. hierzu WITTMANN 1974 S. 61

IV. KAPITEL "MATERIALIEN"

Einleitung:

BRUNERs sechstes Kapitel in "Der Prozess der Erziehung" ist als Unterrichtshilfen betitelt. Er versteht darunter vor allem solche technischer Natur wie Filme, Tageslichtprojektoren, Videorecorder etc. und hebt ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht ausführlich hervor. Für die Intention dieser Arbeit ist diese Sichtweise zu eng. Eine der wichtigsten Aufgaben der mathematikdidaktischen Behandlung spezieller Stoffe wie der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht nun einmal darin, geeignete Unterrichtsangebote für alle Klassenstufen zu entwickeln, wobei massgeblich auch die BRUNERschen Unterrichtshilfen Verwendung finden. Für diese Entwicklung haben wir in den drei zurückligenden Kapiteln entscheidende Vorarbeit geleistet:

- im I. Kapitel haben wir primär unter mathematisch-philosophischem Aspekt den Stoff analysiert und eine Liste von fundamentalen Ideen aufgestellt.
- im II. Kapitel haben wir die entwicklungspsychologischen Randbedingungen für einen Stochastikunterricht studiert und das Verhalten des Individuums in stochastischen Situationen untersucht.
- im III. Kapitel haben wir vor allem die grundsätzlichen Möglichkeiten, einen unterrichtlichen Einfluß auf die intellektuelle Entwicklung auszuüben sowie die Bedeutung intuitiver Erklärungsmodelle, insbesondere für die Bewältigung stochastischer Probleme,diskutiert.

Es wird nun darum gehen, aus diesen vorbereitenden Kapiteln konkrete Folgerungen für den Unterricht abzuleiten sowie mögliche Unterrichtsaktivitäten zu entwickeln. Aus ähnlichen Gründen wie zu Beginn des ersten Kapitels, als wir bei der mathematischen Analyse die Geschichte der Stochastik gestreift haben, wollen wir auch jetzt zu Beginn des unterrichtspraktischen Kapitels in Form eines geschichtlichen

Rückblicks prüfen, ob wir aus der Vergangenheit Lehren für die Gegenwart ziehen können. Ich habe es vorgezogen, die geschichtliche Linie des Stochastikunterrichts an Hand fachdidaktischer Publikationen anstatt,wie bei solchen Themen üblich, an Hand von Lehrplänen zu referieren.
Der Hauptgrund für dieses nicht ganz unverfängliche Vorgehen bestand einfach darin, daß aus den Lehrplänen ja meist die Ideen und Motivationen, die zur Festlegung von Unterrichtsinhalten geführt haben, verschwunden sind. Ein Handikap hierbei war allerdings, daß mir aus der Zeit vor 1945 so gut wie gar keine fachdidaktische Publikation vorlag.

Nach diesem geschichtlichen Rückblick soll in einer Art Gesamtschau eine Reihe von Folgerungen für den Stochastikunterricht aus den ersten drei Kapiteln expliziert und danach systematisch Aktivitäten zu stochastischen Ideen sowie die Rolle didaktischer Prinzipien dabei diskutiert werden. Der Hauptakzent soll dabei aber auf der schulpraktischen Konzeption von Unterrichtsangeboten liegen.

Eine Diskussion ausgewählter Probleme und Fragestellungen zur Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vorwiegend im Primarbereich) bildet den Abschluß dieses Kapitels.

1. Stochastik im Spiegel der fachdidaktischen Literatur

(Geschichtlicher Rückblick)

1.1. Entwicklung bis 1960

Bis Ende des 1. Weltkrieges ist die Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung im allgemeinen in den Oberstufen der Gymnasien vertreten. LIETZMANN (1916 S.310f) gibt einen guten Eindruck vom damaligen Verständnis der Stochastik als Schulstoff. Er beginnt mit der Feststellung, daß die Kombinatorik "ein abgestorbener Zweig der Mathematik" sei, während es sich bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung um einen "sehr lebenskräftigen" handele. Nach einem Bedauern darüber, daß in der Wahrscheinlichkeitsrechnung "zwischen Wissenschaft und Unterricht geringe Übereinstimmung besteht", gibt er einen Leitfaden für das Vorgehen auf der Schule. Danach wird zunächst die Laplacesche Definition der Wahrscheinlichkeit behandelt und dann die Sätze "über die Summe und das Produkt von Wahrscheinlichkeiten durch Rückgang auf die Definition abgeleitet". LIETZMANN schließt ab mit den Worten: "Mit diesen Gesetzen ist der wissenschaftliche Apparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule im allgemeinen erschöpft" und regt an, als Anwendungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Versicherungsrechnung zu behandeln.

Auch HÖFLER (1910 S.353) sieht in den beiden obig erwähnten Formeln den schulrelevanten Gehalt der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Schulstoff. Er schlägt vor, die Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Schule unter dem Gesichtspunkt zu überdenken, daß in den beiden Formeln [(Additions- und Multiplikationsregel)] die arithmetischen Grundoperationen für Brüche in Reinkultur zu Tage treten und motiviert werden können. Es deutet sich bei HÖFLER schon der in neuester Zeit fachdidaktisch höchst wichtige Gesichtspunkt der Integration und Verschmelzung mathematischer Inhalte im Unterricht an.

Alles in allem genommen sind jedoch aus heutiger Sicht die damaligen fachdidaktischen Bemühungen als recht naiv anzusehen. Ein Zitat von LIETZMANN (1916 S.311) ist hierfür bezeichnend:

> "Der Schüler neigt sehr dazu, beide Sätze (Additions- und Multiplikationsregel) bei den Anwendungen miteinander zu verwechseln. Als Gegenmittel empfehle ich die Regel, die z. B. in dem kleinen Büchelchen [(sic)] von O. MEISSNER über Wahrscheinlichkeitsrechnung ....gegeben wird: Stehen die Fälle im Verhältnis des 'Entweder - Oder', dann ist zu multiplizieren, stehen sie im Verhältnis des 'Sowohl - Als Auch', dann sind sie zu addieren." [(sic)]

Nach dem 1. Weltkrieg verschwindet die Wahrscheinlichkeitsrechnung weitgehend aus dem Stoffkanon der allgemeinbildenden Schulen in Deutschland und kommt erst Mitte der fünfziger Jahre wieder auf. Daß dies erst so spät wieder geschieht, liegt einerseits wohl daran, daß die Stochastik während der nationalsozialistischen Ära auch in wissenschaftlicher Hinsicht vernachlässigt wird, zum anderen aber sicherlich auch an den Grundlagenkontroversen von Objektivisten und Subjektivisten sowie der Problematik der verschiedenen Wahrscheinlichkeits-"Definitionen". Die Nachwirkungen dieser Kontroversen erstrecken sich bis hin zu Lehrplanentscheidungen. MADER (1955 S.36) berichtet aus einer Lehrplanbesprechung im Fach Mathematik in der DDR:

> "...Über die Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik herrschte jedoch keine einheitliche Meinung. Es wurde geltend gemacht, daß gewisse mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch nicht geklärt seien und daß es vor allem aus diesem Grunde nicht ratsam erscheine, dieses Stoffgebiet in den Stoffplan der Schule aufzunehmen."

Es dauert über 10 Jahre, bis in der DDR wieder fachdidaktische Publikationen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erscheinen. Obwohl auch in der Bundesrepublik noch 1961 im überarbeiteten Standardwerk von LIETZMANN[1] auf "grundlagentheoretische Schwierigkeiten" hingewiesen wird, verläuft die Entwicklung hier doch etwas anders. In einigen Lehrplänen der Bundes-

---

1) LIETZMANN 1961[3] S. 229

länder ist Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zumindest als Wahlthema für die Oberstufe vorgesehen. FLADT/KRAFT/DREETZ(1955) nehmen einige Seiten zur deskriptiven Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihren Oberstufenanalysisband auf und REIDT/WOLFF/ATHEN (1955) geben ein Ergänzungsheft zum Oberstufenband heraus, der fast denselben Stoff, wenngleich etwas umfangreicher, zum Thema hat. Die Verfasser motivieren ihren Kurs mit den "vielfältigen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik" und meinen im Vorwort:

> "Deshalb kann die Schule, die zum Leben erziehen will, an einer Einführung in diese neue Begriffswelt nicht vorübergehen."

In einer der wenigen fachdidaktischen Publikationen zur Stochastik aus den fünfziger Jahren gibt STENDER (1955 S.272) einen Überblick über "Ziele und Möglichkeiten" eines Lehrganges in mathematischer Statistik, wobei er vor allem die "Schulung des begrifflichen Denkens und Formulierens" in den Vordergrund stellt sowie die Absicht "den Schüler einen Einblick in den Aufbau des heutigen naturwissenschaftlichen Weltbildes gewinnen zu lassen". Der verwendete Wahrscheinlichkeitsbegriff ist ein frequentistischer, obwohl STENDER klar zu erkennen gibt, daß dies nicht allzusehr thematisiert werden soll. Vielmehr "empfiehlt es sich .... propädeutisch vorzugehen, d.h. einer Reihe von Begriffen noch eine zeitlang ihren vorwissenschaftlichen Charakter zu lassen". Dieses "propädeutische Vorgehen" hat jedoch nicht die Bedeutung, wie sie später bei ENGEL(1966 b), FISCHBEIN u. a. (1969) etc. zu finden ist, sondern bezieht sich nur auf die Erarbeitung stochastischer Begriffe in der Oberstufe. Überhaupt wird in den wichtigen fachdidaktischen Beiträgen zur Stochastik, sei es bei LIETZMANN (1961[3] S.229), im "Handbuch der Schulmathematik" von WOLFF (1966[*] (1961) S.184f) oder im Sammelband "Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung"[2] (1960) von ATHEN (Hrsg.) kein Hehl daraus gemacht, daß es sich bei Stochastik um einen reinen Oberstufenstoff handelt.

---

2) In der Reihe: DER MATHEMATIKUNTERRICHT; Stuttgart 1960

Ein Zitat von INEICHEN (1960 S.7) kennzeichnet diese Haltung:

> "Zunächst ist zu beachten, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur auf der Oberstufe behandelt wird, so daß sie also nicht wie etwa die Geometrie in mehr propädeutischer Art auf der Unterstufe eingeführt, dann in der Mittelstufe ausgebaut und schließlich in der Oberstufe vertieft werden kann."

Auf den Modellcharakter der Wahrscheinlichkeit wird in diesen "frühen" Beiträgen zur Wahrscheinlichkeitsdidaktik selten eingegangen. Vielmehr wird in den meisten Beiträgen eine frequentistische Wahrscheinlichkeitsdefinition bzw. -festlegung bevorzugt, so etwa bei STENDER (1955), FLADT/KRAFT/DREETZ(1955), BESUDEN (1959/60), INEICHEN (1960), WOLFF (1966,(1960[1])), KÜTTING (1962). Dies hat seinen Grund unter anderem darin, daß der Bildungswert der Stochastik in der Anwendung auf naturwissenschaftliche Problemstellungen gesehen wird und nicht so sehr im "Auflösen eines magischen Weltbildes". Diese Haltung kommt zum Ausdruck in solchen Aussagen wie der folgenden von INEICHEN (1960 S.11)

> "...der Bildungswert solcher Aufgaben [(Glücksspielprobleme)] ist unseres Erachtens allerdings nicht gerade hoch einzuschätzen."

oder in der Auswahl von Beiträgen zu den beiden Sammelbänden zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Reihe "Der Mathematikunterricht" von 1960 und 1962, in denen vereinzelte stochastische Themenstellungen wie "Bevölkerungsstatistik, statistische Methoden in der Biologie, statistische Prüfverfahren, Informationstheorie, Hypothesentesten" für den Gebrauch in Oberstufenarbeitsgemeinschaften elementarisiert werden.

Alle diese Ansätze bis Mitte der sechziger Jahre sind in der Bezeichnungsweise von LENNÉ (1969) am treffendsten der tradtionellen (Aufgabendidaktik" zuzurechnen, womit LENNÉ (1969 S. 34) im wesentlichen meint, daß "...nicht so sehr grundlegende mathematische Ideen oder Formenkreise umschrieben" werden "sondern eher Bereiche von konkreten Aufgaben".

Außer dieser geschilderten Richtung der gymnasialen Stoffdidaktik, die sich im wesentlichen auch in den Vereinigten Staaten findet, läßt sich innerhalb des betrachteten Zeitraumes rudimentär schon eine zweite Linie erkennen, die

durch die Namen PAGE, INHELDER und BRUNER gekennzeichnet ist, ihren prägenden Einfluß jedoch erst gegen Ende der sechziger Jahre voll entfaltet. INHELDERs Beitrag für den Sammelband von DRENCKHAHN "Der mathematische Unterricht für die 6- bis 15-jährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland" von 1958 kann man schon als programmatische Stellungnahme für ein Präcurriculum der Wahrscheinlichkeitsrechnung deuten. Sie schreibt darin:

> "Wer geneigt ist, die mathematische Erkenntnis entweder auf reine Konventionen zurückzuführen oder als Abbild ewiger Wahrheiten im platonischen Sinne zu betrachten, wird mit der eigentlichen Schulung des mathematischen Denkens spät einsetzen und vorwiegend die formale Symbolik pflegen. Wer dagegen annimmt, die mathematische Erkenntnis sei im konstruktiven Operieren selbst begründet, wird den Kindern schon früh die Möglichkeit geben, anfänglich an Hand von konkretem Material die ersten logiko-mathematischen Operationen zu vollziehen..." (INHELDER 1958 S. 87)

In einem Memorandum von 1959, das sie für die WOODS HOLE Conference verfasst, aus dem ein Jahr später BRUNERs Buch "The process of education" hervorgeht, drückt sie sich auf die Stochastik bezogen, noch konkreter aus:

> "Der Unterricht in probabilistischem Denken, jenem so allgemeinen, wichtigen Charakteristikum moderner Wissenschaft, ist in unserem Schulsystem unterhalb der Universitätsebene kaum entwickelt...Unsere Forschungsarbeit hat ergeben, daß das Verstehen von Zufallsphänomenen vielmehr gewisse konkrete logische Operationen voraussetzt, die durchaus im Bereich des Fassungsvermögens des jüngeren Kindes liegen - vorausgesetzt, daß diese Operationen frei von schwer verständlichen mathematischen Ausdrücken sind.....Spiele, die auf der GAUSSschen Kurve beruhen, sind geradezu ideal, um dem Kind ein grundlegendes Verständnis von der logischen Operation zu vermitteln, die für das Nachdenken über Wahrscheinlichkeit notwendig ist..... Jede einzelne dieser Entdeckungen kann das Kind machen ehe es etwas von den Techniken der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder den formalen Ausdrücken lernt, die normalerweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet werden. Das Interesse an probabilistischen Problemen ließe sich leicht vor der Einführung statis-

tischer Vorgänge und Berechnungen erwecken und entwickeln. Statistische Manipulation und Komputation sind nur Werkzeuge, die erst dann angewandt werden sollten, nachdem intuitives Verständnis ausgebildet worden ist...."
(in BRUNER 1970 S. 54)

D. PAGE, Teilnehmer der WOODS HOLE CONFERENCE, den BRUNER (1970 S. 50) als "außerordentlich erfahrenen Lehrer für elementare Mathematik" bezeichnet, legt ungefähr zur gleichen Zeit einen Beitrag vor, in dem er eine reichhaltige Auswahl von stochastischen Aktivitäten ab Vorschule vorlegt und viele Gedanken, die erst ein Jahrzehnt später in der fachdidaktischen Literatur zum Tragen kommen, vorwegnimmt. Seine grundlegenden Ideen bestehen darin, daß man in unteren Klassen das Thema "Definition der Wahrscheinlichkeit" nicht erörtern, sondern auf intuitiver Basis mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten soll, daß weiterhin einer strengen Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein frühes intuitives Vertrautwerden mit den wesentlichen Begriffen vorangehen muß und zum dritten, daß Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht als isolierter Kurs konzipiert werden darf, sondern daß vielmehr kontinuierlich bei der Behandlung der traditionellen mathematischen Inhalte Querverbindungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung geknüpft werden müssen. PAGE (1959) belegt mit vielfältigen und prägnanten Beispielen den Wert eines solchen integrativen Vorgehens, das er kurz so charakterisiert:

"Throughout the elementary grades there are many opportunities to give children a better understanding of standard topics while giving them some ideas about probability." (PAGE 1959 p. 232)

Kennzeichnend bei PAGE ist auch die konsequente Verwendung von Tabellen und geometrischen Veranschaulichungen, wenngleich er noch keine Baumdiagramme verwendet und sich damit von vornherein eines mächtigen Instrumentes der Erkenntnisgewinnung begibt.

Wie schon erwähnt, bleiben seine Ideen und auch BRUNERS allgemeine Konzeption - sieht man einmal von zwei Schultexten der SMSG 1966a,b[3] ab - ohne spürbaren Einfluß.

---

3) SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP 1966 a, b

1.2. Der strukturmathematische Ansatz

Im Zuge der sich anbahnenden NEW MATH Bewegung kommt ab 1962 in den fachdidaktischen Publikationen zur Stochastik vielmehr eine neue Linie zum Vorschein, die vor allem auf den Strukturaspekt der Wahrscheinlichkeit abhebt. So sieht etwa STEINER (1962 S. 35) als eine Vorbereitung auf die Wahrscheinlichkeitstheorie die Beschäftigung mit dem Maßbegriff, der aus den gemeinsamen Eigenschaften der Maßfunktionen in der Mittelstufe (Inhaltsmaß, Anzahlmaß) abstrahiert werden kann. Bei der Behandlung der Wahrscheinlichkeitslehre auf der Oberstufe soll dann die axiomatische Methode expliziert im Vordergrund stehen. KÜTTING (1962 S. 63) spricht von der "...Überlegenheit eines axiomatischen Aufbaus..." und JEGER (1966 S. 21) schreibt:

> "...Der axiomatische Aufbau der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Anknüpfung an die Mengenlehre passen gut ins Konzept der gegenwärtigen Reformbestrebungen...
> Bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten zwei wesentliche Strukturen in Erscheinung, die auch in anderen Teilen der Schulmathematik verborgen sind, nämlich die Struktur des Booleschen Verbandes und die Maß-Struktur. Der vorliegende Beitrag verfolgt die Absicht, diesen beiden Strukturen in der Schulmathematik etwas nachzuspüren und sie als natürliche Zugänge zu einer modernen Behandlungsweise der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufzuzeigen."

FRANZ (1967 S. 65) meint, daß "durch die Kenntnis der Mengenlehre der Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erleichtert wird", versucht dies an Hand des KOLMOGOROFFschen Wahrscheinlichkeitsfeldes zu belegen und empfiehlt für eine erste Einführung die "klassische Definition, jedoch unter weitgehender Verwendung der Sprache der Mengenlehre".

Für LANGE (1967 S. 881) gibt die Wahrscheinlichkeitsrechnung "einen Einblick in die axiomatische Methode" und auch ANDELFINGER/NESTLE 1967 sehen die Wahrscheinlichkeitsrechnung als geeignet an, 17 - 19-jährige Schüler in axiomatisches Denken einzuüben. Nach Ansicht der beiden Autoren kommt die Stochastik deshalb auch nur für naturwissenschaftliche Oberstufenklassen und Arbeitsgemeinschaften in Frage.

Die Liste läßt sich fortsetzen bis zu KOSSWIG (1972; o.J.) und SEIM (1974). In allen diesen Beiträgen steht der strukturmathematische Aspekt der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zentrum, wobei nur die Akzente verschieden gesetzt werden. Man kann die Ziele dieser fachdidaktischen Entwicklung, die noch nicht abgeschlossen ist, grob in folgende Kategorien einteilen:

1. Betonung der axiomatischen Methode in der Stochastik
2. Herausarbeitung der Booleschen Struktur und der Maßstruktur
3. Einsetzen der Mengenlehre zur Klärung stochastischer Fragestellungen
4. Nützung stochastischer Fragestellungen, um die in den Schulen vorgesehene Mengenlehre anwenden zu können.
5. Integration von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mengenlehre, um die didaktische Stoffülle besser bewältigen zu können.

1.3. Der spiralige Ansatz des Stochastikunterrichts

Ganz ohne Wirkung blieb die WOODS HOLE CONFERNECE und BRUNERs Buch nicht, was die Wahrscheinlichkeitsrechnung betrifft. Schon 1963 legt die CAMBRIDGE CONFERENCE ON SCHOOL MATHEMATICS einen Curriculumplan vor[4], der für die Klassen 7 bis 12 die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in den traditionellen Mathematikkanon integriert. Der Einfluß von WOODS HOLE ist an mehreren Stellen entscheidend spürbar, etwa wenn (S. 70) von "fundamental ideas" die Rede ist oder (S. 48) davon, daß das Programm mehrere Runden Wahrscheinlichkeit durchlaufe, wobei die erste von vier Runden intuitiv aufgebaut ist.
Drei Jahre später legt die SMSG Schultexte über Wahrscheinlichkeit vor, einmal für den Elementarunterricht, zum anderen für

---

4) GOALS FOR SCHOOL MATHEMATICS 1963

die Sekundarstufe I[5]. Die Einsicht, daß die Stochastik nicht als ein isoliertes Stoffgebiet der Mathematik betrachtet werden darf, sondern eher als eine "besondere Denkweise", die zu ihrer Entfaltung einer ständigen und frühen Schulung bedarf, setzt sich jedoch erst auf Grund bahnbrechender Arbeiten von ENGEL (1965, 1966) durch, in denen ENGEL die Ergebnisse der WOODS HOLE CONFERENCE nachträglich durch konkrete Unterrichtsvorschläge für die Sekundarstufe brillant illustriert.[6] Er stellt in den obig erwähnten Beiträgen die folgenden Thesen auf, die durchweg alle auch bei BRUNER 1960 in allgemeinerer Fassung formuliert sind:

a) "Jeder Gebildete muß ausreichende Grundkenntnisse auf den Gebieten Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik besitzen..."(ENGEL 1966 S. 5)
b) Die Wahrscheinlichkeitsrechnung muß auf "...der Schule mehrmals durchgenommen werden, wobei bei jedem Durchgang Tiefe und Strenge zunehmen." (ENGEL 1966b, S. 5)
c) Dabei kommt dem ersten Durchgang, der schon möglichst früh begonnen werden soll und in dem schon propädeutisch wichtige mathematische Ideen vermittelt werden sollen, entscheidende Bedeutung zu. (vw. ENGEL 1965 S. 271)
d) Dieser propädeutische Kurs in Wahrscheinlichkeitsrechnung schon für Kinder ab 11 Jahren ist unbedingt nötig, da der Schüler noch keine anschaulichen Vorstellungen von wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffen hat.(1965 S. 271) "Der Schüler muß hier an einfachen Beispielen und vielen Experimenten die Begriffe und Methoden der WT erleben." (1965 S. 271)
e) Schon "...in diesem Stadium muß der Schüler die fundamentalen Ideen und Methoden...der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch einfache Beispiele und zahlreiche Erfahrungen verstehen." (1966 a, S. 159; Übers. d. Verf.)

---

5) über die mir leider nur aus sekundären Quellen Informationen vorgelegen haben.

6) ob ENGEL diese Ergebnisse gekannt hat, entzieht sich meiner Kenntnis.

f) Allerdings darf "...die intuitive Einführung nicht falsch oder irreführend sein, sondern nur unvollständig strukturiert. Sie darf die spätere strenge Behandlung nicht verbauen oder stören." (1966b S. 5)

g) Da ein solches Programm Zeit braucht, "...muß die Wahrscheinlichkeitstheorie organisch in den Lehrstoff eingeschmolzen werden." (1965 S. 271) Um dies zu ermöglichen "...braucht man nur das Aufgabenmaterial der Lehrbücher auszuwechseln." (1966b S. 5)

Gegenüber früheren Vorschlägen ist ENGELs Entwurf von besonderer Bedeutung, weil er wohl als erster Fachdidaktiker klar ausspricht, daß elementares stochastisches Wissen zum allgemeinen Bildungsgut gehört, zum anderen, weil er sich endgültig von der Vorstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Stoffgebiet gelöst hat und Stochastik stattdessen konsequent als kontinuierliche Leitidee sieht. Bemerkenswert sind von mehreren Aspekten her seine Unterrichtsvorschläge für den "propädeutischen Kurs". In früheren Publikationen wird noch versucht, den Stoff für den Stochastikunterricht nach dem logischen Aufbau der Fachwissenschaft zu gliedern, nur eben entsprechend elementarisiert, was zur Folge hat, daß das Arbeiten in der Mengenalgebra und die mathematische Erschließung der wichtigen Formeln einen breiten Raum einnehmen und vor dem eigentlichen stochastischen Arbeiten sehr viel an formalem Begriffsapparat erarbeitet werden muß. ENGEL dagegen stößt sofort, ohne langwierig auf logischem und mengentheoretischem Felde zu arbeiten, auf idealtypische Verfahren und Probleme der Stochastik wie Erwartungswerte von Zufallsvariablen, Irrwege, Verteilungen und Simulationen zu, wobei er die Erklärungskraft von Baum-, Wege-, Fluß- und Carnaughdiagrammen von Anfang an systematisch ausnützt, ja gewissermaßen seinen ganzen Kurs darauf aufgebaut hat. Die Diagramme sind nicht mehr Veranschaulichungen à posteriori, vielmehr werden von Anfang an und mit diesen Diagrammen mathematische Sachverhalte erarbeitet.

Die Grundschule wird von ENGEL, auch in den späteren weiterführenden Publikationen von 1970/1971 ausgeklammert, einfach aus dem einleuchtenden Grund, weil er nach seinen Aussagen auf dieser Schulstufe keine Erfahrung hat. [7]

Vor allem VARGA weist 1966 auf dem XV. Mathematikkongress in Moskau darauf hin, daß "jede inhaltliche Reformierung jede Niveaustufe erfassen soll" und daß "...Reformierungen, die erst auf weiterführenden Stufen beginnen...nur Übergangscharakter haben". [8] Eine ähnliche Absicht vertreten KAUFMANN/STEINER, H. (1968, S. 315) in einem Report über die CSMP Konzeption:

> "The teaching of probabilistic reasoning and model building can begin with rather young children. At first the children have to get the proper intuitive feeling for probability. The abstract patterns can then be developed in an spiral approach..."

Die allgemeine Tendenz ist somit klar ersichtlich. Nachdem die entwicklungspsychologischen Forschungen der Genfer Schule wieder starke Beachtung finden, ja schon erste didaktische Prinzipien wie etwa das operative Prinzip (AEBLI 1963, FRICKE 1968) daraus entwickelt worden sind und die Vorschläge von DIENES, an Hand von strukturiertem Material in der Grundschule strukturmathematische Begriffe konstruktiv zu erarbeiten, (im Gegensatz zu BRUNERs Ideen) weite Verbreitung in der öffentlichen Diskussion finden, ist es nur eine Frage der Zeit, wann auch der Stochastik an der Grundschule versuchsweise Raum gegeben wird. Ansätze dazu sind vor allem bei VARGA (1969) und FISCHBEIN u. a. (1969) (ab 4. Grundschulklasse) zu finden. Beide Autoren zeigen recht detailliert, Möglichkeiten auf, die Stochastik schon auf der Grundschule vorzubereiten - jeweils von verschiedenen theoretischen Warten aus. VARGA [9] macht (für die ungarischen Schulen) den folgenden Lehrplanvorschlag zur Stochastik und belegt ihn an instruktiven Beispielen: (auszugsweise nach GÖHNER/WEBER 1971)

---

7) vgl. ENGEL 1971a S. 355

8) VARGA 1967 S. 355

9) auszugsweise nach GÖHNER/WEBER 1971; dieser Aufsatz beruht auf einer Tagung, die VARGA 1970 in Deutschland abgehalten hat.

Klasse 1 Ereignisfolgen (z. B. Werfen von Reißzwecken) Strichlisten, Säulendiagramme.

Klasse 2 kombinatorisches Zählen, Variationen, Permutationen Wahrscheinlichkeitsspiele zur Unterscheidung von unmöglichen, möglichen, sicheren Ereignissen.

Klasse 3 Graphische Darstellungen, arithm. Mittel, weitere kombinatorische Aufgaben. Baumdiagramme. Ordnen von Wahrscheinlichkeiten (mehr oder weniger wahrscheinlich) Vermutungen und ihre Kontrolle durch Versuche.

Klasse 4 Tabellen mit 1 und 2 Eingängen (Fakultäten, Pascal-Dreieck) Häufigkeit, relative Häufigkeiten- auch graphisch dargestellt.

Klasse 5 weitere kombinatorische Aufgaben, Schachtelmodell, Wahrscheinlichkeitsversuche verschiedener Art mit gleichem math. Inhalt. Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit in Bruchform, Dezimalbruchform, Prozentform ausgedrückt.

Klasse 6 Erwartungswert und sein Verhältnis zum arithmetischen Mittel und Verhältnis der Wahrscheinlichkeit zur relativen Häufigkeit.
Der Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen, Beispiele und Gegenbeispiele. Stichprobenräume (endliche und abzählbare) auch als cartesische Produkte (z.B. man wirft mit 2 Würfeln: Stichprobenraum ist dann das cartesische Produkt $\{1,2,\ldots,6\ 1,2,\ldots 6\}$.

FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT (1969) stellen vor allem die Beziehung von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit sowie kombinatorische Probleme ins Zentrum ihrer Unterrichtsversuche. Ein Abschlußtest zeigt, daß ein solcher propädeutischer Wahrscheinlichkeitskurs (zumindest ab 4. Grundschulklasse) praktikabel erscheint.[10]

Unterschiede bei den beiden Ansätzen von VARGA und FISCHBEIN u. a. sind nur als Akzentverschiebungen zu deuten.

---

10) Meines Wissens liegen bis heute keine weiteren empirischen Versuche zur Prkatikabilität eines so frühen Stochastikunterrichtes als Veröffentlichung vor.

Bei VARGA stehen im Vordergrund die Integration stochastischer Fragestellungen in allgemeinmathematische Lerninhalte sowie die Umwelterschließung durch frühe stochastische Erfahrungen an Hand geeigneter konkreter Materialien. Dabei spielen (strategische) Spiele, die von VARGA so konzipiert werden, daß sie grundlegende stochastische Ideen beinhalten, eine entscheidende Rolle.

Bei FISCHBEIN u. a. (1969) dominiert der Gedanke, durch Präfiguration der zentralen Begriffe die spätere eigentliche Wahrscheinlichkeitsrechnung vorzubereiten und zu einem statistischen Verständnis der Wahrscheinlichkeit ("dimension statistique de la probabilité") hinzuführen. Während bei ENGEL und VARGA die eigentliche Bezugswissenschaft für die Erstellung von Stochastikunterricht die Mathematik ist - durchdrungen von reichhaltigen Schulerfahrungen - setzt FISCHBEIN entscheidend an entwicklungspsychologischen Randbedingungen und Ergebnissen der BRUNERschen Konzeption an. Inhaltlich besteht insofern ein Gegensatz zwischen FISCHBEIN und VARGA, als ersterer auf der Bruchrechnung aufbaut, während VARGA eher zur Bruchrechnung hinleiten will.

In Deutschland werden VARGAs[11] Ideen von WINTER aufgegriffen und in Schulbuchkapitel für alle Klassen ab der 2. Grundschulklasse umgesetzt, wobei WINTER seine persönliche Weltanschauung vom Unterricht entscheidend einbringt. Danach ist eine Hauptaufgabe des Lehrers in der Grundschule, die kindlichen Vorerfahrungen zu systematisieren und zu ordnen. Da aber das Leben der Kinder in ganz erheblichem Maße durch Unsicherheitssituationen geprägt ist und die Kinder ja ständig im Alltag etwa bei Glücksspielen wie "Mensch ärgere Dich nicht" Erfahrungen zur Wahrscheinlichkeit sammeln, erscheint es naheliegend, solche Erfahrungen[12] in den Unterricht einzubringen,

---

11) Der bedeutende Einfluß VARGAs ist nich so sehr seinen wenigen Publikationen zuzuschreiben als vielmehr seinem Auftreten auf Tagungen (auch in Deutschland).

12) Die Aufgaben und Probleme bei WINTER beziehen sich folgerichtig auch vorwiegend auf Spiel- und Wettsituationen. (Beispiele dafür werde ich in den nächsten Abschnitten zitieren).

sie eventuell unter neuen Gesichtspunkten nachzuvollziehen, zu besprechen und zu versuchen, sie einer Objektivierung und Rationalisierung zugänglich zu machen. In diesem Zusammenhang ist auch WINTERs Aussage zu sehen:

> "Eine der vornehmsten Aufgaben des Grundschulunterrichts besteht allgemein darin, den Kindern bei der Erschließung ihrer Umwelt zu helfen." (1971 c, S. 1)

Von allen Schulbuchwerken in der BRD verwirklicht NEUE MATHEMATIK von WINTER/ZIEGLER am weitestgehenden den Grundsatz, Stochastik als Leitidee zum Verständnis der Umwelt durchgehend in alle Jahrgangsbände (mit Ausnahme von Bd.1 und Bd.5 [13]) in den laufenden Stoff einzubeziehen. Es ist auch auf WINTERs maßgeblichen Einfluß zurückzuführen, daß in den Richtlinien und Lehrplänen für die Grund- und Hauptschulen in Nordrhein-Westfalen schon ab 1969 Lernziele und Aktivitäten in Wahrscheinlichkeitsrechnung formuliert sind.

Der fachdidaktische Fortschritt bei WINTERs Beiträgen gegenüber den früheren Entwürfen von FISCHBEIN und ENGEL ist in den folgenden Punkten zu sehen:

1. Während sowohl in ENGELs als auch FISCHBEINs Konzeption der zu erarbeitende Wahrscheinlichkeitsbegriff ein frequentistischer ist, was zur Konsequenz hat, daß Brüche vorausgesetzt werden müssen, sieht WINTER weitere Möglichkeiten, die teilweise auch schon bei VARGA zu finden sind, nämlich:
   a. Ereignisse in vager Form zu vergleichen und an der VARGAschen Wahrscheinlichkeitsskala [14] wahrscheinlichkeitsmäßig zu bewerten. (WINTER/ZIEGLER II 1971a S. 9).
   b. Bei Ereignissen, die in der Teilmengenrelation stehen, Wahrscheinlichkeiten "vorzahlig" zu vergleichen..." (WINTER/ZIEGLER III 1973 S. 6).
   c. Erste Erfahrungen zu artikulieren etwa in der Form: Was mehr Möglichkeiten hat als ein anderes ist wahrscheinlicher als das andere.

---

13) der schon 1969 erschienen ist, also bevor VARGAs Ideen publik werden.

14) VARGA 1969

Diese Ausführungen rücken WINTER in die Nähe des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes.

2. Während bei ENGEL als einem Vertreter einer handfesten anwendungsorientierten Mathematik kaum die Rede von didaktischen Prinzipien ist und Unterrichtsplanung mehr auf einer "intuitiven Basis" [15] durchgeführt wird und auch bei VARGA, FISCHBEIN didaktische Prinzipien (Präfigurationsprinzip, Prinzip der Strukturorientierung etc.) noch sehr allgemein formuliert sind, expliziert WINTER diese Prinzipien in Form grundlegender Forderungen an den Grundschulunterricht, die besonders für die Erarbeitung stochastischer Ideen Relevanz besitzen:

   "1. Wir steigen von einfachen, möglichst 'offenen' (d.h. ein Problem enthaltenden) praktischen Situationen aus in einen Themenkreis ein. Im Buch werden diese Situationen in der Regel durch Bilder vorgestellt. Diese realen Situationen sollen nicht nur motivierend wirken, sondern selbst schon das Feld mathematischer Aktivitäten sein." (Problemorientierung!)

   "2. Praktische Situationen aus der Umwelt sind meist komplex und oft nicht eindeutig beschreibbar. Daher ist es notwendig, solche Situationen modellhaft (vereinfacht) nachzubauen, und zwar durch didaktisches Material. Die Möglichkeiten des Materials müssen ausgeschöpft werden, d.h. am Material wird mathematisch (auf der Stufe der Gegenstände) gearbeitet." (Modellierung der Umwelt durch konkrete Materialien!)

   "3. Der Übergang zur Versprachlichung solcher Situationen vollzieht sich in zwei Stufen: Erst nach einer angemessenen ausgiebigen Darstellung durch Situationsskizzen, Bilder, Diagramme,... werden (wenn überhaupt) die offiziellen Symbole eingeführt und dann genutzt." (Prinzip EIS!)

   "4. Es sind ständig wechselseitige 'Übersetzungen' vorzunehmen zwischen realen Situationen, Bildern und zeichenhaften Notationen." (Prinzip des intermodalen Transfers!)

---

15) wie sie WITTMANN (1974 S. 25 f) beschreibt.

"5. Der Übergang von praktischen Situationen bis hin zu einer formaleren Begrifflichkeit vollzieht sich in der Regel nicht in einem einzigen Weg, und mag er didaktisch noch so gut gewählt und einfallsreich sein. Vielmehr ist es notwendig, von verschiedenen Situationen aus und über die Arbeit mit unterschiedlichen Materialien mehrmals neu in einen Problemkreis einzusteigen. Das gilt besonders für fundamentale Begriffe." (Prinzip der Variation der Veranschaulichung, Spiralprinzip!)

(WINTER/ZIEGLER 1971c, S. 7)

3. Während "Integratives Vorgehen" in der Stochastik bei ENGEL mehr unter dem ökonomischen Gesichtspunkt gesehen wird, Unterrichtszeit durch "...Auswechseln von Aufgabenmaterial..." [16] zu sparen, sieht WINTER den Wert der Integration vor allem in lernpsychologischen Gründen, von denen einer besonders wichtig erscheint: Da das Individuum umso besser an die Umwelt adaptieren kann, je strukturreicher und kohärenter sein kognitives Instrumentarium ist, liegt es nahe, möglichst aspektreiche Problemsituationen in den Unterricht zu stellen - dazu gehören stochastische ohne Zweifel - und sich ihnen von verschiedenen Warten (Geometrie, Logik, Mengenlehre, Arithmetik) zu nähern. [17]
4. Unterrichtspraktisch gesehen (wie schon erwähnt) ist WINTER am weitesten der Auffassung von Stochastik als Leitidee durch alle Schuljahre hindurch am nächsten gekommen.

1.4. Neueste Entwicklungen

Wir wollen vorerst die Betrachtungen zu WINTERs Konzeption eines frühen Stochastikunterrichts abschließen und uns der weiteren geschichtlichen Linie zuwenden.

1972 bringt der KLETTverlag Stuttgart ein "Mathematisches Labor" zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit heraus, das ziemlich unsystematisiert und wohl auch nicht sorgfältig genug erprobt [18], Material für eine Fülle von spielerischen stochastischen Aktivitäten anbietet. Einen ähnlichen Zweck verfolgt PANKNIN 1972 in seinem Buch: "Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik für die Klassen 1 - 6", das man wohl am

---

16) ENGEL 1966b, S. 5

17) vgl. hierzu die Bemerkungen über die "integrative Kraft" von S. 197

18) vgl. SORGERs Rezension in ZDM 1974

ehesten als Beispielsammlung kennzeichnen kann, da es wohl eine Fülle praktischer Anregungen, jedoch keine grundsätzlichen Punkte diskutiert. Auch RADE und LUKACS geben auf dem internationalen Grundschulkongress für Mathematik 1973 in EGER (Ungarn) weitere möglichen Aktivitäten an, ohne daß sich prinzipiell neue Aspekte ergeben. Überhaupt scheint auf internationaler Ebene die Szenerie der Wahrscheinlichkeitsdidaktik im Primarbereich seit 1970 beherrscht von einer unsystematischen Produktion oft isolierter stochastischer Spiele und sonstiger Aktivitäten und ohne überzeugende Einbettung in einen allgemeinen Rahmen. Damit einher geht ein Mangel an grundsätzlichen und ordnenden Publikationen etwa zu Fragen wie:

Ist für die Schule ein subjektivistischer oder objektivistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff besser geeignet?
Was sind eigentlich die fundamentalen Ideen der Stochastik?
Was bedeutet "stochastisches Denken"?
Wo gehen fachdidaktische Prinzipien in stochastische Aktivitäten ein?
Nach welchen Kriterien können stochastische Aktivitäten auf ihre Brauchbarkeit als Unterrichtsangebote überprüft werden? etc...

Dieser Mangel erscheint umso schwerwiegender, als jede inhaltliche Reform des Mathematikunterrichts entscheidend von den Lehrern abhängt. Es genügt nicht, Lehrern Spielanleitungen mit angehängtem Kommentar in die Hand zu drücken. Andererseits kann man bei der sträflichen Vernachlässigung der angewandten Mathematik in der Lehrerausbildung kaum erwarten, daß ein "durchschnittlicher Lehrer" auf den jedes curriculare Concept abgestimmt sein sollte [19], fähig ist, auf Grund des in Literatur vorliegenden Ideenmaterials zum Primarbereich einerseits und der Lehrbücher zur Stochastik andererseits eine eigenständige fachdidaktische Unterrichtsplanung und -strukturierung durchzuführen. Die Kluft zwischen diesen beiden Bereichen ist einfach zu groß. Sie etwas aufzufüllen, soll das Ziel der nächsten Abschnitte sein.

---

19) vgl. BRUNER 1970 S. 31

2. Allgemeine Forderungen und Prinzipien für einen frühen Stochastikunterricht

Mit WITTMANN (1974a S. 2) kann man das "Tätigkeitsfeld des Mathematiklehrers" innerhalb der "folgenden Dimensionen" sehen:

(a) fachliche Dimension
(b) psychologische Dimension
(c) pädagogische Dimension
(d) konstruktive Dimension

Diese vier Dimensionen entsprechen grob unseren vier Kapiteln dieser Arbeit. Es liegt nahe, nun da wir bei der Konstruktion von "Materialien" für einen frühen Stochastikunterricht angelangt sind, nochmals bei den ersten drei Kapiteln in Form einer ganzheitlichen Betrachtungsweise anzuknüpfen und daraus grundlegende Forderungen und Prinzipien speziell für den Stochastikunterricht zu gewinnen. Auf allgemeine Charakteristika des Mathematikunterrichts in der Grundschule soll dabei nicht mehr eigens eingegangen werden, da es zu diesem Thema breite Darstellungen gibt.[20]

(1) Eine Liste fundamentaler stochastischer Ideen haben wir auf S. 91 aufgestellt. Diese Ideen (besser gesagt: Ideenkomplexe) waren die folgenden:[21]

0. Leitidee: distanzierte Rationalität
1. Normierung unseres Erwartungsgefühls
2. Das Wahrscheinlichkeitsfeld
3. Verbindung von Ereignissen - Additionsregel
4. Bedingte Wahrscheinlichkeit - Unabhängigkeit
5. Gleichverteilung - Symmetrie
6. Kombinatorik (kombinatorisches Zählen)
7. Urnenmodell - Simulation
8. Zufallsvariable
9. Aussagen zum Gesetz der großen Zahl
10. Stichprobenverfahren.

---

20) Etwas anderes ist es, wenn bewährte mathematischdidaktische Prinzipien wie etwa das operative Prinzip für den Stochastikunterricht eigens interpretiert werden müssen.

21) Diese Kurztitel haben ihre Gültigkeit nur im Zusammenhang mit der zugehörigen Ausführung.

Bei der Aufstellung dieser Liste, die im folgenden zu Grunde gelegt werden soll, hatte die mathematische Analyse den wesentlichen Anteil, wenngleich auch schon implizit fachdidaktische Überlegungen dabei eingegangen sind.[22] Unsere Aufgabe ist es, im nächsten Abschnitt zu diesen Ideen unterrichtspraktische Aktivitäten zu konstruieren, die im Idealfall an jeder Stelle des normalen Unterrichts eingesetzt werden können.

(2) Bei der mathematisch-philosophischen Analyse stellte sich heraus, daß es im wesentlichen zwei Wahrscheinlichkeitsauffassungen gibt: die subjektivistische und die objektivistische. Da die Fachwissenschaftler hier noch zu keinem Konsens gekommen sind, muß sich der Fachdidaktiker wie schon im I. Kapitel erwähnt [23], entscheiden. Wesentlich ist dabei die folgende fach- (wissenschafts)-fremde Überlegung: das "definiendum" der subjektivistischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist die natürliche Fortsetzung der naiven, vorwissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbewertungen des kindlichen Alltags und erscheint somit für einen frühen Stochastikunterricht ab Grundschule adäquater als die objektivistische Deutung. Dazu kommt der weitere Gesichtspunkt, daß schon in der Axiomatik der subjektiven Wahrscheinlichkeiten die Möglichkeit beinhaltet ist, Wahrscheinlichkeiten vorzahlig zu vergleichen (etwa über die Inklusionsbeziehungen von Gewinnmengen) [24]. Der entscheidende Grund, warum wir im folgenden nicht die objektive, sondern die subjektive Wahrscheinlichkeitsdeutung zugrundelegen, besteht jedoch darin, daß wir bei der ersteren an relativen Häufigkeiten und damit Brüchen, die in unseren Grundschulen im allgemeinen erst Stoff bestenfalls des 4. Schuljahrs sind, nicht vorbeikommen.

---

22) vgl. Seite 95
23) vgl. Seite 49
24) vgl. Seite 43

Die Entscheidung für einen subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff hat noch den zusätzlichen Vorteil, daß man keine begrifflich höchst schwierigen Kriterien braucht, welche Ereignisse man mit Wahrscheinlichkeiten belegen darf und welche nicht.[25]

(3) Der Modellcharakter der Wahrscheinlichkeit kommt dabei in ganz natürlicher Weise ins Spiel, als ja subjektive Wahrscheinlichkeitsurteile nur so lange aufrechterhalten werden, als sie ihre Bestätigung in relativen Häufigkeiten finden. Somit kommt es darauf an, die Schüler dahin zu bringen, daß sie auf Grund von Versuchsergebnissen ihr intuitives (oft inadäquates) Erwartungsgefühl an objektiven Gegebenheiten ausrichten. Dazu gehört, daß sie im Laufe der Zeit objektive Gesichtspunkte wie Symmetrien, physikalische Unabhängigkeit, Anzahl der günstigen Ausfälle etc. in ihre Urteile einbringen. Eine fachdidaktische Folgerung aus der Leitidee Modell-Realität besteht insbesondere darin, daß im Unterricht bei Zufallsexperimenten nicht gefragt wird: Was wird geschehen? Was ergibt sich auf die Dauer? sondern: Was erwartest Du? oder bestenfalls noch: Was ist zu erwarten?

Man kann dies in einen weiteren Zusammenhang stellen; D. W. MÜLLER (1974 S. 167) stellt folgende Forderung an den Unterricht auf, für den Fall, daß man die Rolle und Bedeutung der "distanzierten Rationalität" ernst nimmt: "...dazu muß in der Sachebene eine präzise Anschauung, in der Entwurfebene eine flexible eigengesetzliche Sprache gepflegt werden." Diese Forderung kommt in den nächsten Punkten deutlich zum Ausdruck.

(4) Die Aussagen von Fachwissenschaftlern u. a. FREUDENTHAL (1974 S. 261f) und DINGES[26] (1973, 1975) legen es überhaupt nahe, auf einen deduktiven Aufbau der Stochastik

---

25) vgl. hierzu etwa die Kriterien von BAMMERT 1973, S. 2:
"1. Die Situation (das Experiment) soll so allgemein sein, daß sie wiederholbar ist (unter den gleichen Bedingungen).
2. Die Situation soll so genau abgegrenzt sein, daß man ihre Wiederholungen zählen kann..." etc.

26) "...die Sprache, die wir im folgenden skizzenhaft entwickeln stützt sich auf das Vertrauen, daß Ereignisse, die an einer Zufallserscheinung beobachtbar sind, auch beschrieben werden können ohne Rekurs auf Mengenlehre." (DINGES 1973 S.2)

(und damit natürlich auch der Präfiguration in der Grundschule) mit Hilfe der Mengenalgebra zu verzichten und stattdessen zu versuchen, das was man als fundamental ansieht, unmittelbar zu elementarisieren. Es spricht für dieses Vorgehen auch, daß z. B. KOSSWIG (o. J.), der sich in seinem "Propädeutischen Kurs in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Sexta" streng an einen logischdeduktiven Aufbau längs der Leitlinie 'Mengenalgebra' hält, nicht einmal bis zum zentralen Begriff der Unabhängigkeit kommt, sondern im wesentlichen nur das Rechnen innerhalb des Wahrscheinlichkeitsfeldes elementarisiert.[27]

(5) Der in (4) angesprochene Verzicht erscheint auch nötig insofern, als man einerseits in der Unterstufe sicher nicht Wahrscheinlichkeit als undefinierten Grundbegriff im Rahmen einer Axiomatik behandeln kann, zum anderen aber, will man im Sinne des Kontinuitätsprinzips "intellektuell ehrlich"[28] Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den Schülern treiben, auf Scheindefinitionen von "Zufallsexperiment"[29], "Stichprobenraum", "Wahrscheinlichkeit" etc. verzichtet werden muß.

(6) Gerade was den Wahrscheinlichkeitsbegriff betrifft, sind sich Fachleute wie FELLER aus dem Bereich der Mathematik und etwa PAGE als erfahrener Schulmann einig, daß ein "operationaler[30]" Zugang zur Wahrscheinlichkeit adäquater ist als ein begrifflich expliziter:

> FELLER (1968):
> "...we shall no more attempt to explain the 'true meaning' of probability..... Instead we shall prove theorems and show how they are applied."

---

27) Man muß KOSSWIG allerdings zugute halten, daß er davon ausgeht, daß Mengenlehre ja sowieso auf Grund der Richtlinien durchgeführt werden muß und durch Beispiel aus der Stochastik interessanter gemacht werden kann. (vgl. KOSSWIG 1972)

28) vw. BRUNER 1970 S. 44

29) eine solche Scheindefinition ist z. B. folgende aus KOSSWIG (o. J. 1973?):
"b) Eintragung ins Merkheft
Definition: Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment, das beliebig oft unter gleichen äußeren Bedingungen wiederholt werden kann und dessen Ausgang vorhergesagt werden kann."

30) vgl. hierzu FREUDENTHALs Bemerkung auf Seite 223 dieser Arbeit

PAGE (1959, S. 232)
"...what can a teacher do who wants to introduce some of the ideas of probability? The answer is: Use the word probability as accurately as you can, work with the ideas of probability which follow, and don't try to say what probability is. Students are quite accustomed to picking up ideas from context. Keep the context reasonably correct and they will infer correct notions."

(7) DINGES (1975) vertritt sogar den weitergehenden Standpunkt, daß sich das Bemühen um Formalisierung zumindest bei der Einführung in die Stochastik nicht lohnt und macht stattdessen den Vorschlag:

"Anstelle einer Formalisierung einzelner Begriffe (im vorliegenden Fall handelt es sich gewöhnlich um die "Wahrscheinlichkeit" und die "Zufalls-variable") muß eine dem jeweiligen Verständnishorizont angepaßte Disziplinierung des Sprachgebrauchs (z. B. beim Gebrauch von Worten wie "Experiment...) angestrebt werden. Statt zu definieren, muß man Sprechweisen pflegen..."

(8) Es ist mehr als zweifelhaft, ob es sinnvoll ist, statt allmählich zu einer "behutsamen Disziplinierung der Sprache" (WINTER) hinzuführen, Begriffsexplizierungen wie etwa in dem schon erwähnten Beitrag von KOSSWIG zu betreiben. Nachstehend folgen daraus einige Zitate:

"Definition:Die Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments nennen wir den Stichprobenraum S dieses Zufallsexperiments." (S.10)

"c) Eintragung ins Merkheft
Stichprobenpunkt
Definition: Jedes Element des Stichprobenraums nennen wir einen Stichprobenpunkt." (S. 11)

"b) Eintragung ins Merkheft
Ereignis
Definition: Jede Teilmenge A des Stichprobenraumes ist ein Ereignis." (S. 12)."

Mit diesem Vorgehen befindet sich KOSSWIG in Konfrontation mit einem vor allem in jüngerer Zeit immer wieder bei profilierten Fachleuten wie THOM (1973), PAGE oder FELLER anzutreffenden Standpunkt, den FREUDENTHAL (1973/74 S. 28) sehr prägnant ausdrückt:

",.. überall in der Mathematik geht der expliziten Formulierung eine häufig lange Periode der unformulierten Operativität voran..."

Der Gegensatz zwischen den beiden Standpunkten läßt sich an Hand eines Beispiels zum Begriff des "sicheren Ereignisses" erläutern:

Begriffsexplizierung: KOSSWIG (o. J. S. 11) läßt ins Merkheft schreiben:

"b) Eintragung ins Merkheft

Sicheres Ereignis: Ein Ereignis, das bei jeder Ausführung des Zufallsexperimentes eintritt, heißt ein "sicheres Ereignis." (S. 17)

unformulierte Operativität:

Wir führen mit den Kindern das "Spitz-pass-auf"-Spiel durch, bei dem ein Kind die Katze, die anderen die Mäuse sind. Die "Mäuse" halten einen Bindfaden in der Hand, an dessen anderem Ende etwa eine auf dem Tisch liegende Plastillinkugel o. ä. befestigt ist. Die "Katze" sagt eine Fangregel, z. B. "3 oder 5", würfelt mit einem Becher und kann versuchen, wenn das zugehörige Ereignis eingetreten ist, die "Mäuse" mit dem Becher zu fangen. Je nachdem, ob sich die Katze irrt oder eine Maus fängt, oder eine Maus sich bei Nichteintreten der Fangregel in Sicherheit bringt, muß eine Spielmarke bezahlt werden. FLOER/SCHIPPER schreiben über den weiteren Verlauf: "Wieder läßt sich das Spiel weiterführen, indem man z. B. auch Regeln wie "5 oder mehr .." zuläßt, evt. auch als Spiel mit zwei Würfeln. (Ein besonders hübscher Einfall bestand einmal darin, daß ein Kind längere Zeit die Regel "6 oder weniger"[31] wählte - zunächst auch sehr erfolgreich, bis die anderen merkten, daß sie sich retten konnten, noch ehe das Ergebnis des Würfelns feststand.)" (FLOER/SCHIPPER 1974 S. 278)

(9) Diese "unformulierte Operativität" zeigt sich in der Stochastik ganz besonders bei Monte-Carlo-Simulationen, bei denen, ohne Explikation, Zufallsvariablen und ihre Erwartungswerte eine gewichtige Rolle spielen. ENGEL (1971a S. 247) schreibt bezeichnenderweise:

"It [(die M.C.M.)] is the best means to develop the intuitive background of probability and to learn

---

31) Hinter dieser letzten Regel steckt der Begriff des sicheren Ereignisses.

to think in statistical terms."

Simulationen dürften somit einen großen Stellenwert im frühen Stochastikunterricht einnehmen, vor allem wenn man noch die auf Seite 70f formulierten Argumente mit berücksichtigt.

(10) Die Ergebnisse aus Kapitel II (Entwicklungspsychologische Randbedingungen!) lassen es als durchaus denkbar erscheinen, ab 1. - 2. Grundschulklasse mit der unterrichtlichen Behandlung von Zufallsphänomenen zu beginnen, umso mehr als sich seit der Zeit, aus der die Befunde von PIAGET/INHELDER stammen, -(1951), sowohl die natürliche Umwelt des Kindes als auch die Grundschule stark gewandet haben. Nachdem inzwischen schon in der Vorschule, spätestens aber in der Grundschule im Rahmen einer geometrischen und logisch-mengentheoretischen Propädeutik sowohl reichhaltige Erfahrungen zur Idee der Symmetrie einerseits und der grundlegenden Mengenoperationen andererseits gemacht werden, bestehen berechtigte Hoffnungen, daß die Grundschulkinder dieses oder des nächsten Jahrzehnts eher über die "Schemata" verfügen (Symmetrien bei Galtonbrettern erkennen [32], Fähigkeit zum disjunktiven Denken [33], Differenzmengenbildung [34] etc.), deren Fehlen in den PIAGETschen Versuchsserien ein tieferes Verständnis der Versuche durch die Kinder verhindert hat. Ob sich tatsächlich Transferwirkungen (etwa: figural-geometrische Symmetrie ---➔ statistische Symmetrie) herausstellen, ist allerdings nur eine Vermutung bzw. eine nach dem Stande unseres derzeitigen Wissens naheliegende Hypothese für entsprechende (noch nicht vorliegende) empirische Untersuchungen.

Was die Kombinatorik betrifft, für die nach PIAGETs Befunden erst Kinder aus Stade III voll zugänglich ist, so sind inzwischen von der Fachdidaktik eine Reihe von konkreten Materialien bzw. Aktivitäten (Legotürme, Ketten,

---

32) vgl. Seite 116
33) vgl. Seite 131
34) vgl. Seite 133

Spielkarten, Permutationsmaschinen etc.) entwickelt worden, die Grundschulkinder ansprechen können, wenn es dem Lehrer nicht um jeden Preis darum geht, Formeln und Systeme zu explizieren.[35] Wie FISCHBEIN u. a. (1970a) zeigen, ist dann durchaus verständnisvolles Arbeiten mit diesen Materialien und den zugehörigen Baumdiagrammen in der Grundschule möglich, in geringerem Maße allerdings die Übersetzung vom Baumdiagramm in einen Kalkül.

Diese Ausführungen ziehen eine weitere Forderung an den frühen Stochastikunterricht nach sich, die fast schon trivial klingt, dennoch aber, wie sich zeigt, ihre eigenen Probleme hat.

(11) Ansatzpunkte eines frühen Stochastikunterrichts sollten stochastische (oder kombinatorische) Situationen der Umwelt sein, die in Handlungen und Bildern modelliert werden. Durch enaktiv-ikonische Aktivitäten, wozu vor allem die ständige wechselseitige Übersetzung: Aktion ←→ Bild bzw. Problem ←→ Diagramm gehört, sollen intuitive stochastische Erklärungsmodelle erstellt werden, die zwar grob aber adäquat sind.[36] Zu diesen praktischen Tätigkeiten, die sicherlich im Zentrum des Unterrichts stehen sollten, müssen jedoch einige einschränkende Bemerkungen gesagt werden:

(a) Zum einen ist nicht jede Aktivität im Unterricht schon deswegen gut, weil sie enaktiv-ikonisch ist. Vor allem KARASCHEWSKI (hat schon vor Jahren (-1969 -)) davor gewarnt, allzu sorglos Spiele in die Unterrichtspraxis der Grundschule einzubringen. Denn dies läßt sich nicht ohne weiteres aus der kognitiven Entwicklungspsychologie etwa von PIAGET folgern. Nach PIAGET ist für die Erstellung kognitiver Erklärungsmodelle die Ausgewogenheit zweier Momente wichtig, nämlich

---

35) Man kann dies auch so ausdrücken: die Kinder sollen etwa bei kombinatorischen Problemen ein System ahnen, aber nicht unbedingt gleich explizieren können.

36) vgl. S.184

einmal eine günstige Umwelt mit vielerlei Adaptationsangeboten und -forderungen (ADAPTATION) zum anderen aber der ordnende und strukturierende Intellekt des Individuums (ORGANISATION). Konkret bedeutet dies, daß zwar ein gewisses Angebot an Aktivitäten im Unterricht da sein muß, weil sich sonst nur unzureichende Wechselbeziehungen zwischen der Umwelt und Individuum einstellen können. Aus dem gleichen Grund ist aber zuviel Angebot auch nicht gut, weil sich, wie man so schön sagt, "Erfahrungen erst setzen müssen."

(b) Das Vertrackte an Spielen zu stochastischen Ideen ist nun aber, daß sich oft nicht die Erfahrungen herausstellen, die man eigentlich als Lehrer intendiert, sondern "Vorerfahrungen", die, falls sie undiskutiert bleiben, zu inadäquaten Intuitionen führen [37] können.

Nehmen wir etwa als Beispiel das folgende "Tor-Spiel": Gegeben ist ein Spielplan mit n Feldern, einem Würfel, der etwa auf drei Seitenflächen eine 1 und auf den übrigen Seitenflächen eine 0 trägt und eine Spielfigur, die zu Anfang in der Mitte steht. Bei "0" bleibt die Figur, wo sie ist, bei "1" darf der Betreffende um ein Feld in Richtung des Gegners vorrücken.

Fig. 21

Das Spiel ist durchaus kindgemäß und eine umweltbezogene, (wenngleich stark modellierte) praktische Tätigkeit, die zudem den Kindern recht viel Spaß

37)vgl. hierzu auch Fußnote 34 auf S. 119 - 120

machen kann. Nur das Problem ist: worum geht es bei dem Spiel, was wird damit bezweckt? In der Spielanleitung zum MATHEMATISCHEN LABOR (S. 11) steht zu einem praktisch strukturgleichen Spiel:

> "Das Spiel "Fangen" und seine Varianten sind Spiele, die zunächst voneinander unabhängig erscheinen; aber hinter allen drei Spielen steht das gleiche mathematische Modell. Variationen in dem benutzten Zufallsgenerator bzw. der Zahl der Spielfelder (oder der Zahl der Steckwürfel in Variante 5) wollen den Kindern helfen, die gemeinsame Idee zu realisieren und wollen gleichzeitig ihre Fähigkeit fördern, im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung Voraussagen zu treffen."

Was die "Idee" ist, wird dabei nicht gesagt und kann aus dem Text von Lehrern, die nicht in Wahrscheinlichkeitsrechnung unterrichtet wurden, auch gar nicht ermittelt werden. Offensichtlich geht es bei dem Spiel um die Spieldauer, die eine Zufallsvariable darstellt und um den zugehörigen Erwartungswert. Mit anderen Worten: das Problem besteht darin, herauszubekommen, was auf"lange Sicht" geschieht? Eine rechnerische Behandlung dazu kommt jedoch auf elementarer Schulstufe nicht in Frage, so daß rein experimentelles Spielen als einzige Alternative bleibt. Ist das Spielfeld nun zu lang,[38] stellt sich, sogar bei Erwachsenen, bei diesem Problem oft die genau falsche "Erkenntnis" ein: "Wir treten, wenn es so weitergeht, auf der Stelle! Wir oszillieren um den Nullpunkt!" Als Folgerung kann man ziehen, daß solche Spiele sehr sorgfältig dimensioniert werden müssen, damit die Spieler tatsächlich die Erfahrung machen: "Irgendwann ist Spielende durch den Ruin eines Spielers zu erwarten. Es kann schnell gehen oder auch langsamer - am häufigsten tritt vermutlich ein mittlerer Wert ein."

(c) Nun ist gerade bei stochastischen Aktivitäten die Gefahr immer gegeben, daß sich trotz sorgfältiger Pla-

---

38) z.B. bei dem Spiel:"Zufallsreise des Taxifahrers" vw. Spielanleitung zum MATH. LABOR S. 8

nung der Spiele inadäquate Intuitionen bei den Kindern entstehen, da der Zufall nun einmal unberechenbar ist und, wie FREUDENTHAL (1972) gezeigt hat, Stabilität nach den Gesetzen der großen Zahl bei einer Sicherheitsgrenze von 99 % erst nach erschreckend langen Versuchsserien zu erwarten ist. Das bedeutet, daß ein rein empirisches Experimentieren selbst auf der Grundschule nicht für den Lernprozess ausreichen kann. Vielmehr müssen Symmetrie- und Isomorphiebetrachungen in ganz entscheidender Weise ausgenutzt werden, wie später noch ausgeführt wird. Ebenso wichtig sind dabei geschickte Ikonisationen. Günstig etwa erscheint bei dem obigen Spiel folgendes:

Senkrecht zum Spielfeld (an der Tafel oder auf Arbeitsblättern) wird eine horizontale Skala gelegt. Der Spielweg wird somit in ein Koordinatensystem eingetragen.

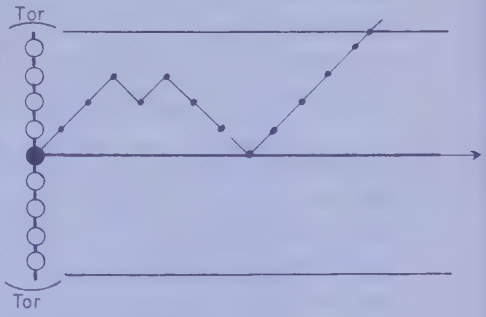


Fig. 22

Das heißt, wir führen das ursprüngliche Problem auf ein isomorphes "Irrwegproblem" in der Ebene zurück. Der Ruin des einen oder des anderen Spielers wird angezeigt durch das Überschreiten der fettgedruckten horizontalen Begrenzungsgeraden. Bei einer solchen Behandlung, wie sie im übrigen in der Spielanleitung zum MATHEMATISCHEN LABOR angedeutet wird, ist eher bei den Kindern die Einsicht zu erwarten, daß im Laufe des Spiels kleinere und größere Schwankungen

zu erwarten sind, die eben auch einmal über die Begrenzungslinien hinausgehen.

Es wird bei diesem Beispiel deutlich, daß das einfache Spiel allein nicht ausreicht und vielmehr flankiert werden muß von anderen Maßnahmen, in diesem Fall durch geschickte Ikonisation (die eine Koordinatenachse ist das Spielfeld selber), Simulation, und Ausnützung der Isomorphie des "Torspiels" und eines Irrwegproblems. Trotz dieser einschränkenden Bemerkungen ist dennoch als eigenständige Hypothese festzuhalten:

(12) "Der frühe Stochastikunterricht lebt geradezu von guten Spielen." (WINTER)
Diese Hypothese und auch die beiden folgenden werden an späterer Stelle ausgeführt, so daß weitere Ausführungen an dieser Stelle entbehrlich sind.

(13) Die "integrative Kraft" stochastischer Situationen sollte voll ausgenützt werden. Überhaupt sollte darauf hingearbeitet werden, daß Problemsituationen in den Unterricht gestellt werden, die nicht allein auf ihren stochastischen Gehalt hin konzipiert worden sind. Vielmehr sollten in solchen Problemsituationen (WINTER nennt sie auch "Verdichtungszonen") die verschiedenen mathematischen Gebiete der Grundschulmathematik zum Ausdruck kommen, wobei allerdings in verschiedenen Unterrichtsstunden verschiedene Aspekte dominieren sollten.[39]

(14) Eine besondere Bedeutung kommt der Beziehung zwischen Bruchrechnen und Stochastik zu. Es liegt in der Natur der Sache, daß ein früher Stochastikunterricht auch eine "frühe Bruchrecheninszenierung" (WINTER) darstellen kann[40] und daß später umgekehrt Anwendungen der Bruchrechnung primär in der Stochastik zu suchen sind.[41]

---

39) Mit dieser Forderung korrespondieren somit das Integrations-, das Stabilisierungs- und das Redundanzprinzip. (vgl. WITTMANN 1974 S. 59-61)

40) Dieser Fragenkomplex wird von J. FLOER im Rahmen einer Dissertation untersucht.

41) vgl. ATHEN (o. J. S. 2)

3. Konstruktion von Aktivitäten zu fundamentalen stochastischen Ideen

Man mag ein Bedauern darüber empfinden, daß im letzten Abschnitt aus der Entwicklungspsychologie relativ wenig konkrete Erwägungen und grundsätzliche Forderungen an einen frühen Stochastikunterricht zu entwickeln waren.[42] Tatsächlich ergaben sich die meisten Folgerungen aus der mathematische Analyse des Stoffes, sowie bewährter fachdidaktischer Prinzipien, wie überhaupt in der Vergangenheit oft entscheidende Impulse für den Mathematikunterricht unter maßgeblichem Anteil von Fachmathematikern ausgegangen sind. Dies ist kein Widerspruch zur heut üblichen Sicht, daß die Kenntnis der Struktur eines Faches für die Curriculumskonstruktion nicht ausreicht, sondern nur die Quellen liefern kann.[43] Auch Fachmathematiker, die didaktisch tätig gewesen sind, haben seit jeher mathematische Inhalte unter ureigenen (oft nicht ausgesprochenen) philosophisch-pädagogischen Einstellungen betrachtet, und gute Hochschullehrer haben schon immer intuitiv[44] ihren Stoff nach fachdidaktischen Gesichtspunkten gegliedert, organisiert. Ein wesentlicher Fortschritt der Fachdidaktik besteht in der Explizierung und Bewußtmachung bewährter fachdidaktischer Prinzipien, die es als möglich erscheinen lassen, Unterrichtsplanung mehr als "ingenieurwissenschaftliche" Tätigkeit zu sehen,[45] statt wie in früheren Zeiten noch als "rein intuitive Fähigkeit" oder gar als "Kunst". Leider sind diese Prinzipien auch nicht konstruktiv in dem Sinne, daß aus ihnen konkrete Unterrichtsangebote deduziert werden könnten, und sie sind auch keine Korsetts, in die jedes pädagogische Vorhaben hineingepresst werden muß.

---

42) Dies ist jedoch nicht verwunderlich, da selbst ein für den Unterricht so relevant erscheinendes Gebiet wie die allgemeine Lernpsychologie, da wo sie exakt im Sinne einer klinisch sterilen Methode vorgeht (behavioristische Schule) fast triviale Ergebnisse für die Schule liefert, dagegen, da wo sie brauchbare Aussagen liefert (Gestalttheorie), nicht exakt erscheint.

43) vgl. FORD/PUGNO 1972

44) Im Sinne von WITTMANN (1974a S. 25)

45) vgl. WITTMANN (1974b)

Jedenfalls ist beides aus den Aussagen GRIESELs (1974 S. 117) und WITTMANN (1975) über den "konstruktiven" Charakter fachdidaktischer Prinzipien nicht zu entnehmen. Eher könnte man sie als Werkzeuge, mit denen Fachinhalte organisiert und bearbeitet werden oder, um einen Ausdruck von KLAFKI [46] zu gebrauchen, als "Problematisierungsschemata" ansehen, auf Grund derer Unterrichtsplanung kritisch geprüft und gewertet werden kann.

Auf der Grundlage dieser Überlegungen ist auch mein Vorgehen im folgenden zu erklären. Adäquate Unterrichtsangebote sind auf jeder Stufe nur so zu erhalten, daß man zu den Quellen zurückgeht, dann aber - im Gegensatz zur vorpädagogischen Strukturanalyse - auswählt und gestaltet und dabei, was Fachwissenschaft, Psychologie und fachdidaktische Prinzipien betrifft, bildlich gesprochen, gleichzeitig an "allen Fäden zieht".

Ich habe für das folgende darauf verzichtet, einen durchgehenden Kursaufbau der Stochastik in einer oder mehrerer Grundschulklasse zu geben. Abgesehen von rein praktischen Gründen (Quantitätsproblem!) ist dabei für mich entscheidend gewesen, daß Stochastik ja nicht als Kurs, sondern als durchgehende Leitidee schon in den frühen Unterricht integriert werden soll. Entsprechend dieser Auffassung kam es mir darauf an, Aktivitäten anzugeben bzw. zu konstruieren, die innerhalb des regulären Stoffes untergebracht werden können und die dazu verhelfen, stochastische Situationen (reale oder künstliche) zu ordnen, zu klären und zu untersuchen. [47] Demgemäß befassen wir uns im folgenden mit den Fragen:

(1) Durch welche konkreten Materialien lassen sich solche obig erwähnten Situationen schaffen?

---

46) in: HENDRICKS (1972 S. 139)

47) der aufmerksame Leser wird bemerken, daß das zugrundegelegte Niveau manchmal beträchtlich schwankt. Dies scheint jedoch unumgänglicher bei gleichzeitiger Betrachtung aller Klassenstufen von 1 - 6. Da es zur Stochastik auf der Orientierungsstufe schon sehr ausführliche Darstellungen gibt, habe ich mich bemüht, das Schwergewicht der Aktivitäten auf die Grundschule zu legen.

(2) Welche Situationen gestatten eine besondere Erhellung der Grundideen?
Es zeigt sich dabei, daß weitere Probleme und Fragenkomplexe auftauchen, nämlich:
(3) Welche Situationen sind reichhaltiger und zeigen das breite Spektrum fundamentaler Ideen?
(4) Wie lassen sich stochastische Ideen mit arithmetischen, logischen und geometrischen Ideen verbinden?
Aus bestimmten Gründen zeigt sich, daß dem Spiel eine besondere Rolle im Stochastikunterricht zukommt. Wir wollen deswegen auch die Frage diskutieren:
(5) Welchen Stellenwert für den Stochastikunterricht hat das Spiel, insbesondere das strategische Spiel?

3.0. Konkrete Materialien und Zufallsgeneratoren

In den meisten nachfolgenden Aktivitäten spielen konkrete Materialien und Zufallsgeneratoren eine zentrale Rolle. Während Münze, Urne (Lostrommel) und Spielwürfel mehr aus dem Alltag der Kinder stammen, sind andere wie Spinner (Glücksräder), Spielkarten, Galtonbretter, Permutationsmaschinen (MÜLLER 1974, MATHEMATISCHES LABOR 1972) oder die Materialien von PIAGET/INHELDER (1951) und FISCHBEIN u. a. (1967, 1970) eher als künstliche Modellierungen komplexer Umweltsituationen anzusehen. Ihr didaktischer Wert ist indessen ungeschmälert, abgesehen davon, daß die Wirklichkeit ohne Vergröberung nun einmal für die mathematische Behandlung meist zu kompliziert ist, auch aus dem mehr psychologischen Grunde heraus, daß "künstliche" Materialien im allgemeinen noch nicht durch falsch verarbeitete Vorerfahrungen der Kinder belastet sind.

Zur Kontrastierung und Variation (der Veranschaulichung!) sind weitere Zufallssimulatoren nützlich wie: falsche Würfel, Würfel mit anderer Einteilung als bei normalen, Tetraeder, Ikosaeder, Dodokaeder, Oktaeder, schiefer Würfel, Streichholzschach-

tel, Reißnagel.[48] Zum Teil lassen sich diese Materialien mit geringstem Aufwand adhoc im Unterricht herstellen. Beispielsweise kann als Spinner ein Blatt Papier mit aufgemaltem Feld dienen sowie eine aufgebogene Büroklammer, die um die auf das Papier aufgesetzte Bleistiftspitze gedreht wird.[49]

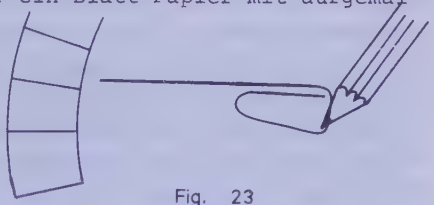


Fig. 23

Für Urnenziehungen scheint ein von RADE entwickeltes Material besonders geeignet. Es handelt sich dabei um durchsichtige mit Murmeln teilgefüllte Plastikflaschen, die geschüttelt und dann umgedreht werden, so daß im Hals der Flasche genau eine Murmel stecken bleibt.[50]

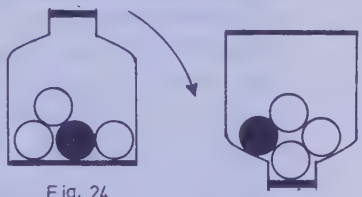


Fig. 24

Wichtig können ferner Spielkarten sein, die im Grunde eine Urne darstellen und in fortgeschrittenerem Stadium vor allem Tafeln von Zufallsziffern, für die wohl kaum irgendwo ein Rechner mit Zufallsgenerator zur Verfügung stehen dürfte.

Neben diesen eigentlichen Zufallssimulatoren kommen im allgemeinen zum Einsatz: Spielpläne, Regelkarten, Stichprobenschachteln[51] sowie Steckbretter, um Urnenvergleiche nach der Art der PIAGETschen Gruppierungstechnik[52] durchzuführen. Legosteine, Rechenrollen, Stübesche Reihenklötze, Ketten (auch aus Strohhalmen und Knetgummi selbstgebastelte) dürften vor allem bei mehrstufigen Zufallsexperimenten (etwa Legotürme als "Erinnerungstürme"[53]) oder für kombinatorische Operationen zum Tragen kommen.

---

48) Die wohl vollständigste Auflistung aller Materialien, die für ein "statistisches Labor" zu gebrauchen sind, ist bei KANIJ 1974 zu finden. 49) Idee meines Wissen von FREUDENTHAL

40) Das Prinzip ist praktisch schon in der "Containertechnik" von YOST u. a. verwirklicht, was zeigt, daß fachdidaktische Ideen durchaus auch in entwicklungspsychologischen Arbeiten stecken.

51) vw. MATHEMATISCHES LABOR 1972, KLETTverlag Stuttgart

52) vgl. Seite 132

53) vw. ENGEL u.a. 1974 S. 24

Von Fall zu Fall sind außer dieser Standard"hardware" besondere Materialien nötig, die aber an der betreffenden Stelle besprochen werden.

(1.) Idee Normierung unseres Erwartungsgefühls

Es ist schon an einigen Stellen gesagt worden, daß auch das Leben der Grundschulkinder durch Unsicherheitssituationen geprägt ist. Die auftretenden Ereignisse werden mit Mitteln der Umgangssprache schon von den Jüngsten wahrscheinlichkeitsgemäß beurteilt. Es fallen Redewendungen wie "sicher", "sehr wahrscheinlich", "kann sein - kann nicht sein", "unwahrscheinlich", "kaum möglich", "unmöglich".[54] Hierin steckt schon eine prämathematische Ordnungsskala, die in natürlicher Weise die mathematische Ordnungsstruktur des reellen Einheitsintervalls wiederspiegelt. Nach einer Idee von VARGA[55] läßt sich diese prämathematische Skala ikonisieren in der Weise, daß die Kinder auf einer vertikal gezeichneten Strecke dem Grade ihrer Überzeugung vom Eintreten eines Ereignisses durch Markieren Ausdruck geben. Ganz oben bedeutet "sicher", ganz unten "unmöglich". Die Kinder werden nun aufgefordert, Ereignisse umgangssprachlich zu bewerten und auf der Wahrscheinlichkeitsskala aufzutragen. Zu bewertende Ereignisse können nach WINTER/ZIEGLER (1971a S.109) sein:

Fig. 25

"Eine Kuh fliegt übers Bauernhaus ..
Peter wird wenigstens 60 Jahre alt...
Frau Müller hat im Lotto nicht 6 Richtige...
Wenn der Stein losgelassen wird, dann fällt er herunter...
etc."

Wir haben in der Grundschule gute Erfahrungen gemacht mit Filztafeln, auf die die Skala geheftet wird, sowie links davon

54) vgl. WINTER/ZIEGLER 1971c S. 5

55) vgl. GÖHNER/WEBER 1971

auf verschiebbaren Filzlappen die sprachliche Formulierung, rechts davon Ereignisse an entsprechender Stelle. Es ist nun Wert darauf zu legen, diese subjektiven und häufig emotional verdeckten Bewertungen allmählich einer Objektivierung zuzuführen.[56] Am besten geschieht dies dadurch, daß man allmählich überleitet von den obigen komplexen Alltagssituationen zu, durch Modellierung vereinfachten, "künstlichen Modellsituationen", wie etwa dem Münzenwurf. Es ist für die Kinder einsichtig, etwa das Ereignis "Zahl" beim einfachen Münzenwurf in der Mitte der Skala zu plazieren. Allerdings muß man hier vorsichtig sein, weil die Kinder grundsätzlich die Tendenz haben, alle Ereignisse, die weder mit "sicher" noch mit "unmöglich zu bewerten sind, in der Mitte zu markieren. VARGA gibt wohl auch aus diesem Grunde in dem schon erwähnten Artikel (1972 S. 352 ff) gleich von vornherein folgende Aktivität an: Den Kindern werden zwei blaue und zwei weiße Kugeln gezeigt, die dann in einen Hut gelegt werden. Nachdem geschüttelt worden ist, werden drei Kugeln auf einmal gezogen. Wird eine Rote dabei sein? Werden es drei Rote sein? Werden zwei Blaue dabei sein? Die entsprechenden Markierungen sehen so aus:

Fig. 26

Es werden systematisch weitere Ziehungen von 1, 2, 3, 4 Kugeln durchgeführt. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, daß eine Blaue dabei ist. (p = 50 %, 83 %, 100 %, 100 %).
Im Diagramm:

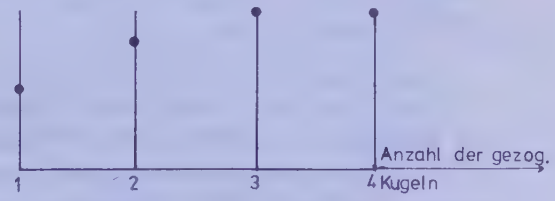


Fig.27

56) vgl. WINTER/ZIEGLER (1971c S. 3)

Die Kinder sollen vor allem dabei erkennen, daß die "intuitive Erwartung" im ersten Fall bei der Hälfte der Skala zu markieren ist, und daß die Erwartung beim Übergang von 1 nach 2 und 3 jeweils höher anzusetzen ist. VARGA stellt klar:

> "Again, the decision should be qualitative and intuitive, though trials are not excluded, indeed intuitions must be based upon something." (ibid. S. 355)

Diese Vorgehensweise ist eine unverfälschte Elementarisierung der ersten Grundidee und stellt auch nicht allzu hohe Anforderungen an die Fassungskraft von Grundschülern.

Weitere Beispiele sind an dieser Stelle entbehrlich, da grundsätzlich diese ikonische Wahrscheinlichkeitsskala bei allen folgenden Beispielen immer wieder verwendet wird.[57]

Grundidee (2.) Das Wahrscheinlichkeitsfeld

Während es in den Aktivitäten zur I. Grundidee nur um die Normierung des subjektiven Erwartungsgefühls im wesentlichen ohne Abstützung auf objektive Gegebenheiten geht, wird schon bei den Aktivitäten zur zweiten Grundidee damit begonnen, die Wahrscheinlichkeitsprognosen zu einem kohärenten System zu koordinieren. Es ist ein Ausdruck dieser Kohärenz, wenn man die Erwartung für ein Ereignis A, das das Ereignis B mengentheoretisch umfaßt, höher ansetzt. Ich greife von verschiedenen Aktivitäten eine mir besonders charakteristisch erscheinende heraus, auch wenn in ihr eigentlich schon mehr als die bloße Ereignisraumstruktur zum Ausdruck kommt. (in Anlehnung an WINTER/ZIEGLER 1971a, S. 111)

> In einem Kasten sind Zahlkärtchen oder beschriftete Tischtennisbälle mit den Zahlen 1 - 100. Es wird jeweils eines (mit Zurücklegen) gezogen. Die Kinder werden vorher in Gruppen mit verschiedenen Gewinnregeln eingeteilt.
> a. Gruppe A gewinnt, wenn die gezogene Zahl kleiner als 40 oder größer als 90 ist.
> b. Gewinnzahlen sind alle Zahlen, die gerade sind oder kleiner als 10
> c. Gewinnzahlen sind alle Zahlen, die ungerade sind und kleiner als 60 sind.

---

57) vgl. z. B. S. 267

d. Gewinnzahlen sind alle Zahlen, gerade und kleiner als 60 usw.

Die Kinder haben ein Feld mit den hundert Zahlen auf Arbeitsblättern vor sich.[58] Es zeigt sich, daß

1	2	3	4	5	6	7	.....
11	12	13	14	15	16	17	...
21	22	23	24	25	26	27	...

Fig.28

schon diese elementare stochastische Problemsituation einbettbar ist in ein weites Feld von Aktivitäten zum regulären Stoff. Entsprechend unserer Auffassung vom operativen Prinzip (mit dem das Integrationsprinzip und das Redundanzprinziep oft korrespondieren), das unter anderem impliziert, daß aus jeder Aufgabe möglichst ein Aufgabenkomplex entstehen soll, lassen wir etwa die folgenden Aktivitäten durchführen:

1) Die Kinder färben die Felder mit ihren Gewinnzahlen rot, blau... Sie sondern hierbei im mathematischen Sinne eine Teilmenge aus dem gegebenen Stichprobenraum als Ereignis aus (klassifizieren).
2) An der Tafel wird eine Strichliste geführt, welche Kinder gewonnen haben[59] (zuordnen, zählen).
3) Es stellt sich heraus, daß Gruppe B immer gewinnt, wenn Gruppe D gewinnt und darüber hinaus noch öfter (logische Implikation). Die Diskussion führt zum Vergleich der beiden Gewinnmengen in Form der gezeichneten Karten. Im Tageslichtprojektor werden die beiden Karten übereinandergelegt (Teilmengeninklusion). Die Frage, welches Ereignis wahrscheinlicher ist, reduziert sich auf die mathematische Inklusionsbeziehung der beiden Gewinnmengen, (jedes blaue Feld ist auch rot) ohne daß der Begriff der Menge hier thematisiert wird.
4) Es werden im Tageslichtprojektor oder an der Tafel Gewinnmengen in Form von obigen Kärtchen gezeigt. Die Kinder erfinden Spielregeln dazu (Mengenlehre - Logik).

Es ist, wie schon früher angedeutet, nicht nötig, für diese Art Aktivitäten die Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bemühen und sei es auch nur das Wort "wahrscheinlicher".

---

58) ...oder das Hundertersteckbrett; Gewinnmengen werden durch entsprechende farbige Stecker gebildet.

59) Hier kommen streng genommen schon Zufallsvariablen ins Spiel.

Entweder man verwendet die ikonische Wahrscheinlichkeitsskala von Seite 234 oder greift auf die auf Seite 44 angegebene Idee von RAMSEY zurück, den Überzeugungsgrad eines Individuums mit seinem Wettverhalten zu messen und zu vergleichen. Auch FREUDENTHAL bemerkt hierzu: (1970 S. 154):

> "Any question on probabilities can be replaced with one on betting rates. Instead of asking somebody whether he estimates one probability larger than the other, or how large he estimates some probability, I can propose him a wager."

Solche Wetten, bei denen zwischen den Gewinnmengen die Mengeninklusion besteht, können auch folgende sein: (WZ II, 1971a S. 111): Tante Petra aus Amerika soll zu Besuch kommen, aber man weiß nicht, an welchem Wochentag. Ruth und Stefan wetten. Ruth sagt: Die Tante kommt am Montag oder Dienstag. Steffan wettet: Die Tante kommt nicht am Wochenende. Der Besuch wird simuliert [60] durch eine Urne mit 7 Zetteln. Ruth wird sehr schnell merken, daß sie schlecht abschneidet und sich für den Grund interessieren. Es bietet sich hier an, nach dem Vorgehen von WINTER mit einem Diagramm zu arbeiten.

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
RUTH gewinnt	x	x					
STEFAN gewinnt	x	x	x	x	x		

Fig.29

Der mathematische Hintergrund ist bei allen diesen Beispielen wieder das vorzahlige, komparative Wahrscheinlichkeitsfeld der subjektivistischen Theorie.

Auch beim Spielen mit einem Würfel lassen sich schon interessante Aktivitäten der gleichen Art finden. Statt aus einer Urne zu ziehen, würfeln die Kinder. Die Spielregeln werden etwas modifiziert. Stefan gewinnt bei einer von 6 verschiedenen Zahl. Hans gewinnt, wenn eine Zahl kleiner als 4 kommt. Peter gewinnt bei einer 1 oder 2.

---

60) Hier kommt schon die Idee der Simulation zwanglos ins Spiel. Ganz läßt sich eine fundamentale Idee sowieso nie isolieren.

Auch hier empfiehlt es sich wieder, zu ikonischen Hilfen zu greifen. Es wird der Würfel mit seinen 6 Ausgängen gezeichnet und die Spieler umfahren farbig ihre Gewinnzahlen. Es ist zwar prinzipiell nicht nötig, bei diesem relativ einfachen Beispiel schon ein Baumdiagramm zu verwenden. Es ist jedoch günstig, das Baumdiagramm nicht erst dann einzuführen - in schwierigen Problemen -, wenn es echt gebraucht wird. Fachdidaktisch läßt sich dies etwa durch das Redundanzprinzip begründen, das ja beinhaltet, daß "...neue Probleme innerhalb bereits eingeführter Kontexte..." (WITTMANN 1974 S. 60) formuliert werden.

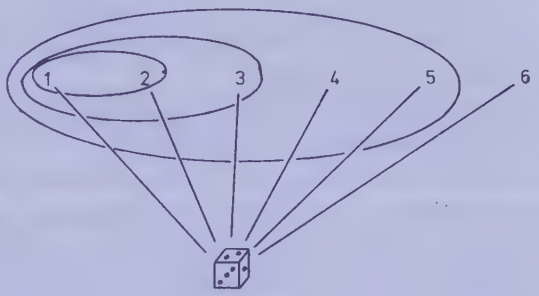


Fig. 30

Weitere Aufgaben zum komparativen Wahrscheinlichkeitsfeld sind bei WINTER/ZIEGLER Bd. II (1971a S. 112) aufgeführt, wovon ich anhangsweise noch einige zitiere:

"Was ist wohl wahrscheinlicher?
a) Peter bekommt im nächsten Diktat eine 1. Peter bekommt im nächsten Diktat eine 1 oder eine 2.
d) Die Fußballmannschaft Borussia gewinnt das nächste Spiel. Die Fußballmannschaft Borussia verliert das nächste Spiel nicht.
e) Alle 5 Kinder der Familie Kunze sind Jungen. Es ist wenigstens ein Junge dabei.
f) Ursel macht bei den Hausaufgaben keinen einzigen Fehler. Ursel macht höchstens zwei Fehler.
g) Alle Kinder kommen montags zu spät zur Schule. Wenigstens ein Kind kommt montags zu spät zur Schule.
h) Beide Strümpfe haben ein Loch. In wenigstens einem Strumpf ist ein Loch.
i) Ein Plättchen ist rot. Ein Plättchen ist rot und klein.
j) Es gibt zum Nachtisch Eis oder Obst. Es gibt zum Nachtisch Eis und Obst."

Grundidee (3) Disjunktive Verknüpfung von Ereignissen- Additionsregel.

Die 3. Grundidee beinhaltete:

a) Ereignisse disjunktiv zu verknüpfen
b) die Wahrscheinlichkeit für solche komplexe Ereignisse anzugeben
c) ihre Wahrscheinlichkeit zurückzuführen auf die Einzelwahrscheinlichkeiten.

Hiervon ist (c) sicher kaum vor dem Erarbeiten der Bruchrechnung in Klasse 5 - 6 durchführbar. Dagegen kam (a) schon bei den unter 2. erwähnten Aktivitäten vor, etwa wenn zwei Regeln disjunktiv zu einer neuen verknüpft werden.[61] Denkbar für die Elementarisierung von (b) und (c) ist jedoch das folgende Vorgehen, das durch unsere entwicklungspsychologischen Befunde legitimiert ist: wir halten bei einem Zufallsexperiment die Zahl der möglichen Fälle konstant, so daß sich die Additionsregel $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ auf $g(A \cup B) = g(A) + g(B) - g(A \cap B)$ reduziert, wobei $g(X)$ die Zahl der für das Eintreten von X günstigen Fälle angibt. Und hierzu lassen sich Unterrichtsaktivitäten der Art durchführen:

Wir würfeln mit einem normalen Spielwürfel und schreiben uns den zugehörigen Baum auf. Folgende Spielregeln sollen gelten:

A gewinnt bei einer Zahl < 5
B gewinnt, wenn eine gerade Zahl fällt. C gewinnt immer dann, wenn sowohl A als auch B verlieren. D gewinnt immer dann, wenn A oder B gewinnt. Wir führen eine Wurfserie durch, z.B. 2, 4, 2, 3, 5 .....

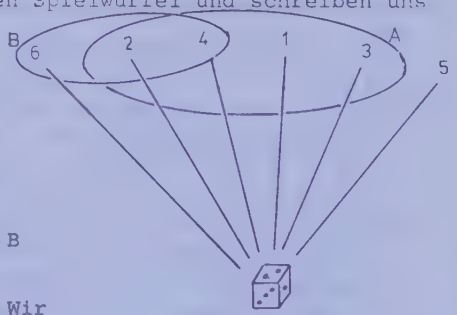


Fig. 31

Wie oft haben A, B gewonnen? Wenn A gewinnt, machen wir einen horizontalen Strich durch die Zahl, wenn B gewinnt, einen vertikalen[62]. Wie läßt sich schnell ersehen, wie oft beide ge-

---

61) vgl. Seite 238 - 239

62) eine andere interessante Elementarisierungsmöglichkeit gibt WINTER in Aufgabe (i.) des Anhangs zu diesem Abschnitt.

wonnen haben, wie oft C, wie oft D gewonnen hat? Wie ergibt sich die Zahl der Gewinne bei D aus der Zahl der Gewinne von A, B, C? Mathematisch steckt immer die Additionsregel für die relative Häufigkeit hinter diesen Aktivitäten bzw. die Additionsregel für das Mächtigkeitsmaß auf Mengen. Im übrigen ist festzuhalten, daß auch bei diesem Problemkreis die Möglichkeit gegeben ist, innerhalb der Standardstoffe wie Mengenlehre, arithmetische Operationen und aussagenlogische Propädeutik wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe zumindest vorzubereiten.

Die Idee, wie sie im letzten Beispiel ausgenützt wurde, statt der eigentlichen Additionsregel eine spezielle zu elementarisieren, läßt sich noch ausbauen und verallgemeinern: Da die Additionsregel ja im wesentlichen eine Maßeigenschaft ist, erscheint es denkbar, sie schon in frühen Klassenstufen zu präfigurieren, indem man zunächst andere Maße betrachtet, insbesondere das Flächenmaß und das Anzahlmaß. Möglichkeiten dazu gibt es viele, etwa:

(1) Bei Flächenberechnungen (oder Raumberechnungen) in Aufgaben der folgenden Art:

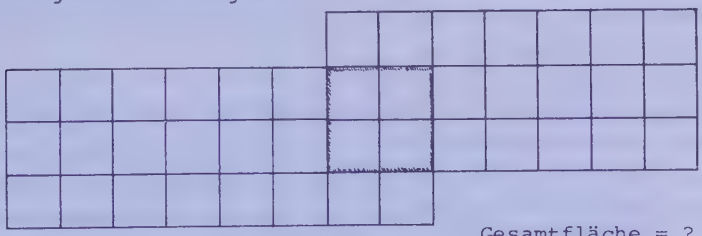


Fig. 32

(2) Bei Aufgaben zum "Prinzip der Mengeninklusion", etwa: Klaus und Peter zählen Autos auf einem Parkplatz und schreiben sie auf. Klaus nimmt die grünen Autos und erhält 7, Peter alle Volkswagen und erhält 11. Beim Vergleich der Listen stellen sie fest, daß sie 3 Autos gemeinsam haben. Wieviel Autos haben sie somit insgesamt tatsächlich aufgeschrieben?
Auch bei dieser Aufgabe, die natürlich zweckmäßigerweise ikonisiert wird (je nach Altersstufe mit verschie-

denem Abstraktions- bzw. Stilisierungsgrad) und vieler Verallgemeinerungen fähig ist, kommt die grundlegende Maßeigenschaft, die in der Additionsregel steckt, zum Ausdruck.

Allerdings muß an dieser Stelle auch gesagt werden, daß sich die Ökonomie der Additionsregel im Grunde erst bei Problemen zu mehrstufigen Zufallsexperimenten zeigt, wie etwa das auf Seite 83 erwähnte Beispiel: "Chuck-a luck."

Grundidee (4) Bedingte Wahrscheinlichkeit - Unabhängigkeit

Wie schon in Kapitel beschrieben, birgt die Unabhängigkeit von Zufallsexperimenten das große Verständnisproblem für viele Menschen und "gibt der Wahrscheinlichkeitsrechnung ihr eigenartiges Gepräge" (KOLMOGOROFF). Es ist nicht zu erwarten, daß ein so fundamentales Problem unterrichtlich auf einfache Weise und kurze Übung gelöst werden kann. Vielmehr muß es in multipler Weise angegangen werden: Durch Beispiele, wo die Unabhängigkeit nicht gegeben ist, durch statistische Versuche und durch Gedankenexperimente.

Anhang

(i) "a) Wie wahrscheinlich ist es beim Werfen eines Würfels, eine Primzahl oder eine gerade Zahl zu erhalten?
b) Wie wahrscheinlich ist es, eine Primzahl und zugleich eine gerade Zahl zu erhalten? (Verwende Streifen aus durchsichtigem Papier wie in Aufg. 5) Färbe die Teilereignismengen und lege Streifen aufeinander."

(ii) "In einer 6. Klasse mit 36 Kindern sind 6 Kinder als Schüler-Lotsen ausgebildet, 15 Kinder haben die Radfahrprüfung und 3 weitere Kinder sind Schüler-Lotsen und haben zugleich die Radfahrprüfung. -Zeichne ein Mengenbild.- Wie wahrscheinlich ist es, daß ein zufällig herausgerufenes Kind dieser Klasse
a) Schüler-Lotse ist
b) die Radfahrprüfung hat
c) Schüler-Lotse ist oder die Radfahrprüfung hat
d) Schüler-Lotse ist und die Radfahrprüfung hat
e) weder Schüler-Lotse ist noch die Radfahrprüfung hat?"

(beide Aufgaben aus WINTER/ZIEGLER 1970b S. 197)

Man beginnt etwa mit zwei Würfeln, die zusammengebunden sind. (PAGE 1959 S. 264)

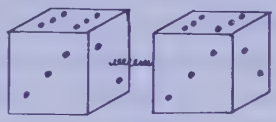


Fig. 33

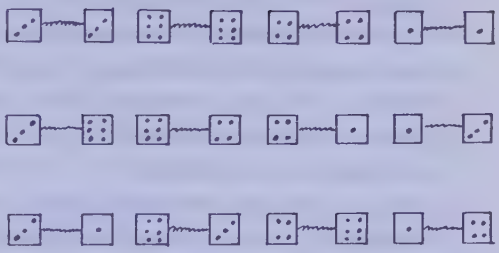


Fig. 34

Die Schüler sehen ein, daß durch das kurze Verbindungsstück eine Abhängigkeit in den Ausfällen besteht. Weiterhin ist gut vorstellbar, daß die Abhängigkeit mit steigender Entfernung der Würfel abnimmt. Die volle Unabhängigkeit der beiden Würfel ist dann als Grenzfall (unendliche Schnurlänge!) zu interpretieren. PAGE nützt hier entscheidend eine Folgerung des operativen Prinzips aus, nämlich daß Operationen, die sich zu Systemen bzw. Gruppierungen organisieren, leistungsfähiger und mobiler sind als isolierte Operationen oder Schemata. In diesem Fall geht es um das aus der Reversibilitätseigenschaft von Gruppierungen entwickelte didaktische Prinzip, daß Schemata nach Möglichkeit zusammen mit ihren inversen Schemata unterrichtlich behandelt werden sollten. Auf das Beispiel "Unabhängigkeit" bezogen, von dem wir ausgegangen sind, heißt das:

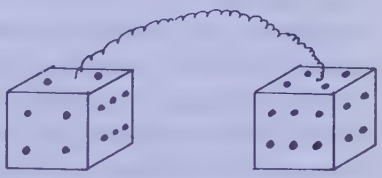


Fig. 35

> Die Unabhängigkeit wird nicht als isolierter Begriff erarbeitet, sondern als Synthese der beiden gegensätzlichen Begriffe unabhängig-abhängig.

Es ist aber nicht nur eine statische Kontrastierung, wie sie sich etwa im GAGNÉSCHEN (1969, S. 177) "Kontrastverfahren" ausdrückt, sondern dynamisch in dem Sinne, daß sich bei unserem

Beispiel die Unabhängigkeit durch eine stetige Transformation (Verlängerung der Schnur!) als Grenzfall der Abhängigkeit ergibt.

In späteren Stufen kann man zur Kontrastierung auch so genannte Markoffmünzen verwenden, wie sie ENGEL (1971a S. 245) vorschlägt. Das Ergebnis des ersten Spinners gibt an, welcher Spinner als nächster gedreht wird.

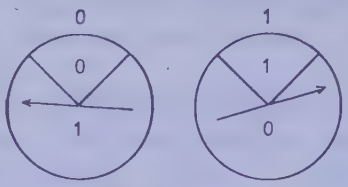


Fig. 36

Weiterhin kann man aus Urnen (Lostrommeln) ziehen lassen. (Zusammensetzung etwa 1 Gewinn unter 3 Losen). Mehrere Nieten sind gezogen worden. Ist die Chance nun günstiger? Nun wird das gezogene Los immer wieder zurückgelegt. Ändert sich die Chance nun?

Abgesehen von der Absicht, auch hier das Phänomen "Unabhängigkeit" mit "Abhängigkeit" zu kontrastieren spielt hier auch der Wunsch mit, die Schüler dahin zu bringen, daß sie nicht den Anfangszustand, sondern die jeweils gültige Zusammensetzung der Urne berücksichtigen, was ihnen in den PIAGETschen Versuchen ja ausgesprochen schwer gefallen ist.[63] Bei dieser Aktivität, wie überhaupt bei vielen anderen, ist es günstig - vor allem in unteren Klassen -, das Ganze als Wettspiel aufzuziehen. Die Frage also, ob die Schüler ihre Wahrscheinlichkeitsbeurteilung der jeweiligen Urnenzusammensetzung ändern, reduziert sich dann auf die eher behavioristisch zu beurteilende Frage, ob sie ihr Wettverhalten ändern, (falls die Lose nicht zurückgelegt werden) wozu sich FREUDENTHAL (1970 S. 154) äußert:

> "Behavioristic definitions instead of logical ones are completely legal and trustworthy in elementary probability since every deviation from what ist the logical background would be severely punished by material losses."

Weiter sollte man beim Phänomen der Unabhängigkeit auch im Unterricht durchaus ähnliche Argumente verwenden, wie sie schon EULER in seiner Auseinandersetzung mit D'ALEMBERT verwandte.[64]

---

63) vgl. hierzu auch FISCHBEIN u. a. 1969 S. 23

64) vgl. Seite -) 178

Weiß die Münze noch, was sie vorher gezeigt hat? Weiß sie es in 10 Jahren noch ? etc. Eine nicht zu geringe Rolle, allerdings auch nicht die entscheidende, spielen bei der Frage der Unabhängigkeit statistische Experimente, indem die Kinder etwa eine Münze 500 Mal (in einem abgekürzten Verfahren durch gleichzeitige Verwendung von 10 Münzen und Ausrichtung mit einem Lineal zu einer Linie) werfen. Diese Aktivität wird von einigen Autoren (BÖHME 1966, DONAT 1968) gern als Hausaufgabe verwandt mit folgender Absicht: Einige Schüler, die der Lehrer nicht kennt, dürfen Zufallsfolgen aus dem Gedächtnis hinschreiben, ohne tatsächlich die Münzen zu werfen. Da in solchen Folgen erfahrungsgemäß zu wenig 3-erblöcke von "Zahl" etc. vorkommen, ist es dem Lehrer meist möglich, zum Erstaunen der Klasse, einfach durch Auszählen die"Mogler" herauszufinden. Sieht man von diesem Showeffekt ab, so bietet auch diese Aktivität weitere wertvolle Möglichkeiten. Wir lassen etwa auf den "zufälligen" Arbeitsblättern auszählen und fragen uns dabei: Kommt nach "Zahl"öfter "Wappen" oder "Zahl"? Kommt nach "Doppelwappen" öfter "Zahl" oder "Wappen"?

Nach unseren Erfahrungen scheint es auch günstig, zwei Spieler gegeneinander spielen zu lassen, indem sie eine Münze zweimal hintereinander werfen. Der eine gewinnt, wenn nach dem ersten Wurf der zweite Wurf das gleiche Ergebnis hat; der andere Spieler gewinnt, wenn die Münzenseite wechselt. Wer gewinnt auf die Dauer?

Wie schon an anderer Stelle erwähnt, kann jedoch solches empirisches Auszählen oder Spielen auf die Dauer nicht genügen

---

65)Es seit hier nur am Rande erwähnt, weil auch andere Grundideen hineinspielen, daß an Hand dieses letzten Beispiels auch andere falsche Vorstellungen der Kinder korrigiert werden. Füllt man die Urne tatsächlich vor den Augen der Kinder, wie angegeben, etwa: Gewinn-Niete-Niete-Gewinn-Niete-Niete-Gewinn-Niete-Niete.... und man zieht als erstes einen Gewinn, dann sind viele Kinder im Grundschulalter der Überzeugung, es kämen jetzt zwei Nieten und dann wieder ein Gewinn. Man hat im Unterricht an solchen Stellen Gelegenheit, diese falschen Vorstellungen einzudämmen.

(obschon man zu Anfang das Anlegen von Strichlisten als eine durchaus anzustrebende Schülerleistung sehen muß), sondern muß verarbeitet werden mit Hilfe von ikonischen Hilfsmitteln u. U. auch enaktiven etwa wie folgt: Wir nehmen ein zweistufiges Galtonbrett, (das leider nicht leicht selber anzufertigen ist) wie es auch FISCHBEIN u. a. verwendet haben und studieren an Hand der herabrollenden Kugeln zunächst den Mechanismus.[66] Im nächsten Schritt simulieren wir das tatsächliche Rollen der Kugeln durch das zweimalige Werfen einer Münze, oder eines Würfels oder eines Spinners.

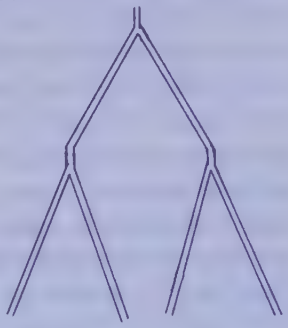


Fig. 37

D. h., wir stellen durch unsere Tätigkeit eine Isomorphiebeziehung zwischen unserem ursprünglichen Zufallsexperiment und anderen her. In recht legerer Weise verwenden wir dabei während der Experimente "L" für "links", "O" und "W" für Wappen synomym und entsprechend "R", "1", "Z". Abmalen des Galtonbrettes führt in ganz natürlicher Weise zum allen Versuchen gemeinsamen Baumdiagramm.[67]

Nun gibt es noch viele andere isomorphe Zufallsexperimente. Es wäre jedoch eine grobe Fehlinterpretation des DIENESschen Mehrmodellprinzips, wollte man alle diese Aktivitäten massiert behandeln. Ein altes lerntheoretisches Prinzip, daß nämlich verteilte Übung besser als massierte ist sowie das Stabilisierungsprinzip ständen einem solchen Vorhaben entgegen. Vielmehr sollte von Zeit zu Zeit eine und dieselbe Spielsituation in neuem Gewande aufgegriffen werden. Solche neuen Verkleidungen können zum Teil schon recht anspruchsvoll sein: Wir beschriften eine Reihe von Streichholzschachteln mit "1" (oder "Zahl", oder "Rot" etc.) bzw. mit "O", aber in gleicher Anzahl. Die Streichholzlade wird in zwei Felder geteilt, die mit "1" und "O" beschriftet werden.

---

66) Dieses Zufallsexperiment ist isomorph zum doppelten Münzenwurf. Die Unabhängigkeit ist jedoch an diesem "Galtonbrett" leichter erkennbar.

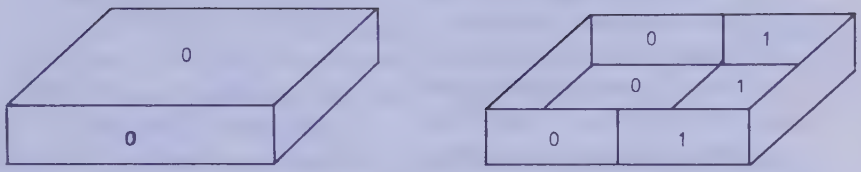


Fig. 38

Wir legen nun die Streichholzschachteln in eine Urne und mischen. Dann wird eine Schachtel zufällig gezogen, die aufgemalte Ziffer aufgeschrieben, ebenso wird zufällig die Lade halb geöffnet und die dabei erkennbare Ziffer hinter die erste geschrieben. Während bei dieser Aktivität noch die Unabhängigkeit gegeben ist, kommt bei der folgenden Variation schon entscheidend die Abhängigkeit und damit die bedingte Wahrscheinlichkeit ins Spiel: Wir füllen die (weißen oder) O-Schachteln vorwiegend mit weißen und einigen schwarzen Kügelchen und die 1-schachteln vorwiegend mit schwarzen und einigen wenigen weißen Kügelchen. Die Schachteln kommen in eine Urne, die gut gemischt wird. Dann wird eine Schachtel zufällig ausgewählt und daraus zufällig ein Kügelchen entnommen. Das geforderte Ereignis ist ein weißes zu ziehen. Wichtig hierbei ist, daß die Kinder ihr anfängliches Erwartungsgefühl modifizieren, wenn sie sehen, welche Schachtel zunächst gezogen worden ist.

Variationsmöglichkeiten, etwa der Art, daß auf die Schachteln gerade bzw. ungerade Zahlen geschrieben werden, sind gegeben, wie auch die Möglichkeit eines fließenden Übergangs von der Abhängigkeit zur Unabhängigkeit zu schaffen, indem nämlich die Zahlenverhältnisse in den Schachteln allmählich angeglichen werden.

Als recht günstig zur Aufhellung des Unabhängigkeitsphänomens erweisen sich Spiele, deren Kernidee auf VARGA zurückgeht. Wir haben etwa folgende Spielpläne [68] : (Fig. 39 - 40)

---

67) Die Tatsache, daß so viele verschiedenartige aber isomorphe Zufallsexperimente den gleichen Baum haben, ist ein Grund für die fundamentale Bedeutung der Baumdiagramme.

68) Idee aus einer Staatsexamensarbeit von D. SCHMIDT

Jedes Kind bekommt einen Spielstein und einen Würfel und setzt den Stein zu Spielbeginn auf eines der an "Start" angrenzenden Felder. Es kann von einem Feld zum nächsten erst dann ziehen, wenn es das Ereignis würfelt, das auf dem jeweiligen Standort angezeigt ist. Die Reihenfolge wird wie üblich geregelt. Der Sinn des Spieles besteht darin, daß die Kinder sich von der inadäquaten Vorstellung der stochastischen Abhängigkeit beim mehrfachen Würfeln lösen und stattdessen die Zahl der zu durchlaufenden Stationen als objektives Kriterium in ihre Einschätzung der Chancen aufnehmen.

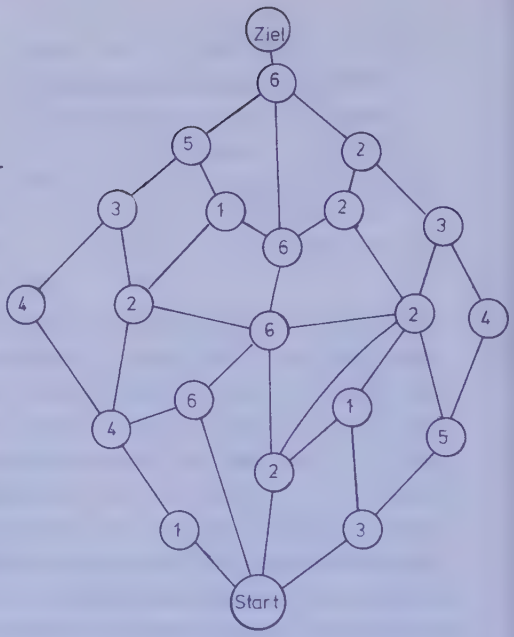


Fig. 39

Bei sehr jungen Kindern ist zum Begreifen der Unabhängigkeit auch folgende Aktivität nützlich. Im Zusammenhang mit Wegen und Straßennetzen (Graphen!) legen wir den Kindern das Netz von Fig.40 vor und erzählen etwa folgende Geschichte dazu:

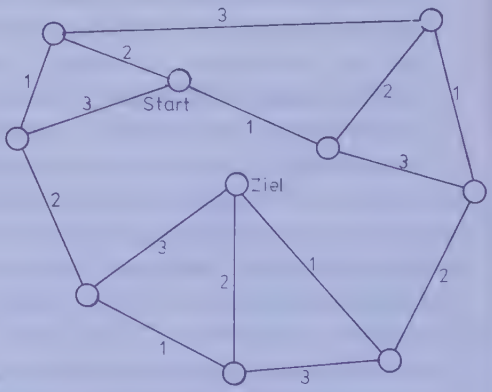


Fig. 40

Ein Bäckerjunge soll morgens die Brötchen

austragen. Da er keine Lust hat, jeden Morgen die gleiche Strecke zu gehen, numeriert er alle abzugehenden Straßen, ausgehend von den Kreuzungen mit 1, 2, 3. Jeden Morgen trägt er nun ein Glücksrad (Fig.41) bei sich, das er an jeder Ecke dreht, und geht in die angezeigte Straße. Trifft er zu Hause ein, hat er Feierabend.

Fig.41

Ziel bei dieser Aktivität ist, die Kinder entdecken zu lassen, daß das deterministisch geplante Modell des Bäckerjungen nicht funktioniert, weil prinzipiell bei jeder Ecke, unabhängig von vorhergehenden Versuchen dieselbe Chance für jede der drei Zahlen besteht.

Auch gerichtete Graphen kann man sehr hübsch für das Nahebringen der Unabhängigkeitsidee ausnützen. Zu nebenstehendem Graph läßt sich etwa die Geschichte denken, daß ein Wanderer aus A durch eine Stadt hindurch muß, die nur Einbahnstraßen hat. Bei jeder Gabelung läßt er eine Münze entscheiden. Wenn er Pech hat, landet er im Gefängnis G. Die Kinder bekommen Spielmarken und spielen Wanderer. Wer ins Gefängnis kommt, kann sich mit einer Spielmarke loskaufen und neu anfangen. Die Kinder spüren beim Ausführen, wie selten jemand durchkommt, indem er 10101, also alternierend wirft und daß doch meist ein Zweierblock bei jeder Wurfserie ist.

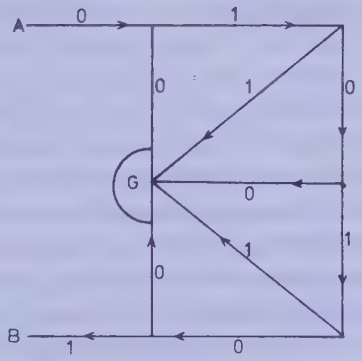


Fig. 42

Kann man vielleicht die Beschriftung der Straßen ändern, damit weniger ins Gefängnis kommen? Auch hierbei machen die Kinder grundlegende Erfahrungen zur "individuellen Freiheit" bei jedem neuen Wurf bzw. zur Unabhängigkeit. Kombinatorische, graphentheoretische und ganz elementare Codierungsprobleme

können im selben Kontext, je nach Stufe behandelt werden, etwa: [69] Wieviele Wege mit 1,2,3,4,... Teilstücken führen von einem Punkt A zu einem Punkt B? Gibt es dafür einfache Algorithmen? Wie läßt sich die Zahl der Kanten aus der Zahl der Ecken in Fig.40) errechnen? Welchen Weg nimmt der Bäckerjunge, wenn er am Abend vorher seinen vorgesehenen Weg ausgewürfelt und etwa 1, 2, 3, 1, 3, 1, 3, 2, 1 erhalten hat? Welchen Weg könnte er genommen haben, wenn wir nur den Anfang 1, 2, 3, und das Ende 2, 1 kennen? etc.

Was man im Unterricht aus diesen Aktivitäten behandelt, hängt einerseits vom gerade laufenden Stoff und zum anderen von der Stufe ab. Jedenfalls dürfte sich die probabilistische Intuition in diesem schwierigen Punkt der "stochastischen Unabhängigkeit" am ehesten beeinflussen lassen, indem man das Thema von verschiedenen Situationen aus ansteuert.

Während die "Unabhängigkeit" auf allen Altersstufen Schwierigkeiten macht, ist die bloße Verbindung von Zufallsexperimenten zu mehrstufigen relativ unproblematisch. Bewährt hat sich etwa der folgende Aktivitätenkomplex: Wir würfeln mit drei Würfeln verschiedener Farbe. Was erhalten wir, wenn der rote Würfel 5 zeigt, der grüne 2, der schwarze 3 als Summe der Augenzahlen? Was ist die Summe der verdeckten Augenzahlen? Wieviel Punkte sind überhaupt sichtbar? Jeder würfelt und versucht, mit Addition, Multiplikation und Subtraktion möglichst nahe an 15 zu kommen, z. B. wenn er 4, 5, 1 hat, rechnet er: $(4 - 1)\cdot 5 = 15$ bzw. an evt. auf Arbeitsblättern vorbereiteten Flußdiagrammen: (Fig. 43) Wieviel Ergebnismöglichkeiten gibt es nur mit der Addition und Multiplikation bei den Zahlen 6, 6, 5 ? Welche Zahlen könnte jemand geworfen haben, der als Ergebnis dabei 16 erzielt hat? etc...

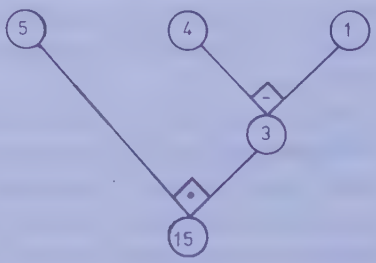


Fig. 43

69) Die Vorschläge beziehen sich auf die beiden letzten Spielpläne. (Fig. 39 - 40)

Nach solchen Übungen, die man als Ersatz für das oft übliche "Fünfminutenrechnen" ansehen kann, die aber durchaus auch den Großteil der Stunde einnehmen kann, ist der eigentliche stochastische Aktivitätenkomplex schon gut vorbereitet. Wir würfeln etwa mit zwei Würfeln, einem roten und einem grünen. Es soll auf die Summe der Augenzahlen ankommen. Wer tippt auf 2, wer auf 7, wer auf 14? Diese Wetten können eingekleidet werden etwa in das folgende Spiel [70], bei dem jeder Mitspieler seine Figur auf eines der Startfelder 2 oder 8 setzen darf und erst dann auf ein benachbartes Feld darf, wenn er die Zahl, auf der er gerade steht, gewürfelt hat. Wer kommt am schnellsten durch? Das Problem dabei ist, den günstigsten Weg zu finden. Bei den Kindern kristallisiert sich im Laufe des Spiels die Intuition heraus, daß mache Felder schwerer als die anderen sind. D. h. sie modifizieren ihre ursprüngliche subjektive Erwartung, daß alle Felder gleich sind, im Laufe des Spielens auf Grund äußerer Gegebenheiten. Im Sinne meiner Wahrscheinlichkeitsauffassung von Seite 83f ändern sie ihr Modell. Der Unterricht hat dabei die Aufgabe, ihnen mit geeigneten Hilfsmitteln zur Seite zu stehen. Das kann im Zusammenwirken zweier Betrachtungsweisen geschehen: Einer a-priorischen und einer posteriorischen.

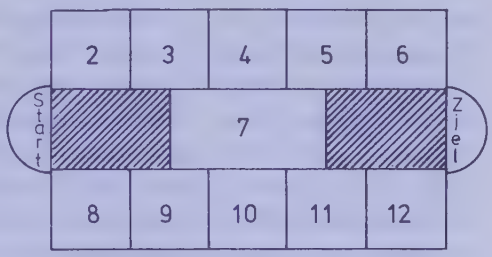


Fig. 44

Wir stellen sowohl eine Strichliste, in der die Werte der ganzen Klasse eingetragen werden, zusammen - und zwar gleich eine

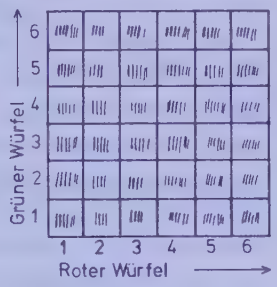


Fig. 45

70) Idee von G. MÜLLER

kartesisch angeordnete (Fig.45)- als auch ein Blockdiagramm der möglichen Würfe (Fig.46). Alle Felder mit der Augensumme 2 werden rot gefärbt - in beiden Diagrammen, alle Felder mit der Augensumme 7 blau gefärbt. Ziel ist es, die Kinder zur Einsicht kommen zu lassen, daß "7" öfter geworfen wurde als "2", weiterhin, daß es für "7" mehr Möglichkeiten gibt als für "2" - und was wichtig ist: Die Kinder sollen einen Zusammenhang ahnen oder erfassen zwischen diesen beiden Tatbeständen. Wenn sie diesen Zusammenhang erfaßt haben, haben sie etwas ganz wesentliches geleistet. Sie haben nämlich den Prozess einer Modellbildung und Modellmodifizierung durchgeführt. Sie haben mit subjektiven Erwartungen begonnen und diese "Anfangswahrscheinlichkeiten" a posteriori (Strichliste !) und durch a-priori-Methoden (Blockdiagramm!) modifiziert. Die Synthese von statistischer Betrachtungsweise und Laplacescher Wahrscheinlichkeitsauffassung führt somit zum, der Problemstellung adäquaten, Modell. Es scheint möglich, an dieser Stelle zu weiteren Möglichkeiten der graphischen Durchdringung der Problemsituation zu greifen. In Frage kommen insbesondere Baumdiagramme (Fig.47) und Säulendiagramme (Fig. 48).Allerdings haben wir mit dem Baumdiagramm an dieser Stelle im Unterricht nicht viel erreicht. Der tiefere Grund dafür dürfte darin liegen, daß Baumdiagramme ihre Erklärungskraft am besten bei kombinatorischen Fragestellungen entfalten können, während das behandelte Problem mehr in den Bereich der Zufallsvariablen gehört. Wir wollen deswegen das Beispiel später noch einmal aufgreifen, und unsere Betrachtungen zur Idee der

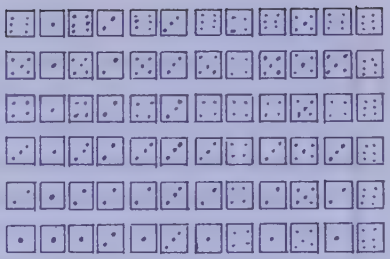


Fig.46a

Fig. 46b

Fig.47

Fig. 48

Unabhängigkeit und den mehrstufigen Versuchen zunächst abbrechen. Im übrigen ist zu diesem Problemkontext eine Reihe weiterer Aktivitäten im MATHEMATISCHEN LABOR (1972) zu finden.

5. Symmetrie - Gleichverteilung

Über den Symmetriebegriff ist an anderer Stelle schon berichtet worden in seinen Formen als figural-geometrische Symmetrie und als statistische Symmetrie etwa in der Form des Prinzips vom unzureichenden Grunde. Vor allem den Symmetriebegriff in der zweiten Bedeutung gilt es zu erarbeiten. Die Beispiele von FISCHBEIN u. a. (1967) [71] zeigen, daß es nötig ist, die Schüler entdecken und erarbeiten zu lassen, daß statistische Symmetrie nicht unbedingt die figural-geometrische Symmetrie voraussetzt. Wichtige Hilfsmittel dafür sind u. a. die Prinzipien des Begriffelernens nach GAGNE (1969) und DIENES, [72] von denen sich das "Kontrastverfahren" unmittelbar anbietet: Wir kontrastieren symmetrische Zufallssituationen mit nichtsymmetrischen. Hierfür haben PIAGET/INHELDER (1951) schon entscheidende Ideen geliefert in Form von unsymmetrischen Spinnern [73] und anderen Mechanismen. Wir beginnen etwa im Unterricht mit einem vertikal an der Tafel hängenden großen Glücksrad mit drehbarem Pappezeiger, dessen Schwerpunkt nicht mit dem Drehpunkt übereinstimmt, oder mit einem Spinner, der wie im PIAGETschen Versuch auf einen unsichtbaren Magneten reagiert oder einem Würfel mit Bleieinlage. Die Kinder vom zweiten Schuljahr an, spätestens vom dritten, merken im allgemeinen sehr schnell,

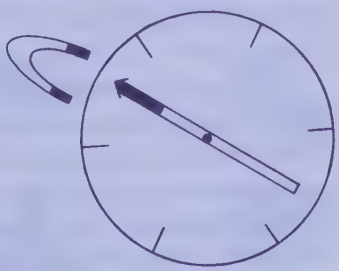


Fig. 49

71) vgl. S. 144

72) vgl. unser Vorgehen bei der Idee der Unabhängigkeit

73) vgl. S. 122f

daß ein Trick am Werk ist, Worin besteht aber der Trick und damit die Unsymmetrie? Was müssen wir tun, damit es gerecht zugeht? Welche Ergebnisse erhalten wir mit einer Streichholzschachtel, an deren Innenseite wir ein Bleigewicht kleben? Was ändert sich, wenn das Bleigewicht weggelassen wird? Was, wenn wir zwei Bleigewichte an zwei gegenüberliegende Seiten ankleben? Wo muß die "Sechs" bei einer Streichholzschachtel hin, damit sie möglichst oft kommt?

Durch solche Übungen verdichtet sich bei den Kindern die Intuition, daß es nicht auf die Aufschrift ankommt, sondern auf räumliche, gewichtsmäßige, physikalische Symmetrie. Vor allem bei jüngeren Kindern ist ja oft ein rein subjektiver Störfaktor vorhanden, der sich äußert in Bermerkungen wie: "3" ist meine Glückszahl!" oder "Die "Sechs" kommt selten". Um dem entgegenzuwirken, empfiehlt es sich, Isomorphien auszunützen, etwa die vorbelasteten Zahlen 1 - 6 auf den Würfelflächen durch nicht vorbelastete Symbole wie bei PIAGET durch Buchstaben, Wörter oder Symbole zu ersetzen. Damit sich nicht neue egozentrische und subjektive Erwartungen herausbilden, ist ständige Rationalisierung im Unterrichtsgespräch nötig. Eine wichtige Rolle spielt dabei das inzwischen aus den Lehrbüchern eliminierte "Prinzip des unzureichenden Grundes". Wenn das Individuum nicht fähig ist, - auf Befragen hin - einen stichhaltigen Grund dafür anzugeben, daß eine bestimmte Seite öfter erscheint, wird es den Tatbestand der Gleichverteilung eher als adäquat akzeptieren.

Nun ist es natürlich so, daß die apriorische Annahme einer Symmetrie eine Modellvorstellung ist, deren Adäquatheit durch ein Experiment getestet werden muß - was gerade beim Würfeln sehr langwierig sein kann. Wir legen deswegen nach wie vor Wert darauf, auf unsere These hinzuweisen, daß zwar rein empirisches Experimentieren nötig ist, die eigentliche Einsicht in unsere Grundideen jedoch durch apriorische Modellvorstellungen, Gedankenexperimente und Isomorphien geschieht.

Beispielsweise ist manchen Kindern die Symmetrie klar bei Urnen (mit den Zahlen 1 - 6), bei anderen dagegen bei einem Glücksrad (mit 6 kongruenten Sektoren) und bei anderen Kindern wiederum vielleicht beim Würfel. Durch das Erkennen der Isomorphien werden die zunächst isolierten Ideen der Würfelsymmetrie, der Urnensymmetrie und der Spinnersymmetrie zu einer umfassenderen Idee oder auch Schema im PIAGETschen Sinne generalisiert. Die Symmetrie ist die Voraussetzung für Gleichverteilung bzw. die LAPLACEsche Regel in der spe - ziellen Form $p = \frac{g}{m}$ und in der allgemeineren Form $p = \mu(A)/\mu(E)$ [74]. Beides läßt sich schon in der Grundschule ohne Brüche behandeln. Beispielsweise ist die Sprechweise "die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A ist g/m" vollkommen gleichwertig mit der Sprechweise: "g von m Fällen sind günstig" oder "A gewinnt in 7 von 10 Fällen, B gewinnt in 3 von 10 Fällen", [75] die nach unseren Erfahrungen zumindest ab der dritten Grundschulklasse gepflegt werden kann, wenn man darauf achtet, daß diese Sprechweise nicht von den Schülern deterministisch interpretiert wird, etwa so: "bei 10 Versuchen gewinnt A sieben Mal, dagegen B drei Mal."

Für die allgemeinere LAPLACEsche Regel $p = \mu(a)/\mu(B)$ stammen geeignete Aktivitäten vor allem mit unsymmetrischen und symmetrischen Spinnern von WINTER [76] und ENGEL (1971a). Durch spielerische Erfahrungen lernen die Kinder, daß es bei diesen Spinnern, die aus einem weißen und einem schwarzen Sektor bestehen, für das Eintreten des Ereignisses "weiß" nur auf die Weißfläche bzw. die zugehörige Bogenlänge ankommt. Diese Einsicht wird vertieft, indem die Weißfläche zerschnitten und neu organisiert wird. (vgl. a -d)

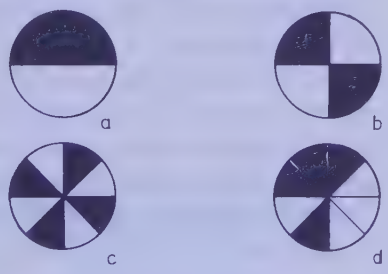


Fig. 50

74) vgl. Seite 23

75) vgl. GÖHNER/WEBER 1971

76) vgl. WINTER/ZIEGLER 1973 a S. 141

Größere Kinder sind meist schon fähig, eine Feinaufteilung von sich aus vorzunehmen und wahrscheinlichkeitsmäßige Aussagen zu treffen in der Form: "in 4 von 12 Fällen ist rot zu erwarten."

Dieses letzte Beispiel scheint mir aus folgendem Grunde von besonderer Wichtigkeit, weil hier durch Verfeinerung des Stichprobenraumes eine Synthese der beiden gegensätzlichen Begriffe Gleichverteilung-Nichtgleichverteilung bzw. Symmetrie-Unsymmetrie durchgeführt wird. Im PIAGETschen Sinne werden die beiden zunächst isolierten Schemata SYMMETRIE-UNSYMMETRIE innerhalb solcher Aktivitäten zu einem umfassenderen und weitaus leistungsfähigeren Schema integriert, nämlich die LAPLACEsche Regel in der erwähnten Form.

Weitere Aktivitäten zur Gleichverteilung im Zusammenhang mit Urnen werden an anderer Stelle behandelt.

---

77) Ebenfalls wird an anderer Stelle (S.307f) über einen geometrischen Zugang zur Idee der Gleichverteilung berichtet.

6. Kombinatorik

In überzeugender Weise haben FISCHBEIN u. a. (1970a) gezeigt, daß die Kinder der Altersstufe 9 - 11 Jahre weit besser bei kombinatorischen Aufgaben abschneiden als bei der PIAGETschen Untersuchungstechnik, wenn sie an Hand von Spielkärtchen und Baumdiagrammen einer relativ kurzen Instruktion unterzogen worden sind. Verwendet man im Grundschulunterricht noch zusätzlich Legosteine, Ketten, Rechenrollen etc. so sieht das Bild nach unseren Erfahrungen noch günstiger aus. Es ist übrigens festzuhalten, daß es praktisch kein derzeit an der Grundschule eingesetztes strukturiertes oder auch homogenes Material gibt, zu dem man nicht sinnvolle kombinatorische Übungen machen kann, ob es sich nun um obig erwähnte Materialien handelt, die speziell auf die Kombinatorik zugeschnitten sind oder um altbewährte wie Cuisenairestäbe, Hundertbrett, Steckbrett, logische Blöcke, geometrische Legespiele, (Kosmos)-Geometriebaukasten etc. Wir weisen deswegen an dieser Stelle ausdrücklich darauf hin, daß Kombinatorik nicht zwangsläufig als Stoffgebiet unterrichtet werden muß. Vielmehr wollen wir immer da, wo es sich gerade anbietet, Fragestellungen zu kombinatorischen Ideen anschließen. Arbeiten wir mit Cuisenairestäben, können wir uns beispielsweise fragen, welche und wieviele Möglichkeiten es gibt, den Sechserstab in vier Stäbe zu zerlegen, weiterhin den Zehnerstab in fünf Stäbe zu zerlegen, wenn einer davon der Viererstab ist ...etc. Ebenso bietet sich beim Arbeiten mit den STÜBEschen Reihenklötzen nach oder während der üblichen Sortierungsaktivitäten an, zu fragen,wieviel verschiedene Türme man (nach verschiedenen Regeln) bauen kann. Vor allem auf diese letzte Aktivität sind Legosteine (Rechenrollen) zugeschnitten, zu denen bei FREUND/SORGER (1971) eine Reihe ab dem 1. Schuljahr durchführbarer Aktivitäten beschrieben sind, wovon ich eine besonders typische herausgreifen und ausbauen will.

Die Kinder erhalten gelbe, rote, schwarze Legosteine. Sobald sie mit dem Material vertraut sind, bauen sie Dreiertürme mit jeweils drei verschiedenen Farben.[78] Dahinter steckt mathematisch die unsystematische Aufzählung aller (3,3)-permutationen. Die Kinder stellen reihum ihre Türme in die Mitte. Dabei taucht das Problem auf, daß manche Türme doppelt vorkommen. Dahinter steckt mathematisch die Frage, wann zwei Türme gleich sind, die in dieser enaktiven Form von den Kindern spielend gelöst wird. Es schließt sich nun der schwierigere Teil an, Gesetzmäßigkeiten zu finden, damit auch bestimmt kein Turm ausgelassen wird. Sortierungsaufgaben der Form: stellt alle Türme mit schwarzem Erdgeschoß zusammen etc. sowie entsprechende Lehrerfragen sind in diesem Stadium recht hilfreich. Die Kinder erkennen Symmetrien und beginnen nach Entfernung der Türme systematisch von neuem. Zunächst werden Türme mit rotem Erdgeschoß gesucht. Wenn hierzu keine mehr zu finden sind, kommen die Türme mit gelbem Erdgeschoß an die Reihe. Mathematisch gesehen wird der Fall n = 3 auf n = 2 zurückgeführt, der leichter überschaubar ist. Parallel zu den bisherigen Aktivitäten spielt sich die Arbeit am Baumdiagramm ab: Jedes Kind nimmt einen Turm, führt ihn am Baumdiagramm entlang und setzt ihn an die richtige Stelle. Dasselbe machen wir nun mit grünen, gelben, roten Steinen etc. was nun, nachdem die Kinder systematisch bauen können, schnell geht.

Nachdem der Fall n = 3 abgehandelt ist, kommt n=4 an die Reihe. (die 3-er Türme liegen noch auf dem Tisch) Die Kinder beginnen wieder mit einer Farbe, etwa mit der neuen Farbe Grün. Gleichzeitig wird mit dem Baumdiagramm begonnen. Die Kinder merken, daß es genügt, auf jeden grünen Stein einen schon vorhandenen Dreierturm aufzusetzen. Das zugehörige Baumdiagramm geht also einfach so weiter, daß

Fig. 51

78) Die DIENESsche These, daß die Konstruktion der Analyse vorangehen müsse, findet hier in Reinkultur Anwendung.

wir das alte Baumdiagramm ansetzen. Aus Symmetriegründen geht es auch bei den anderen Farben so. Zu jeder Anfangsfarbe gehören sechs Türme. Mathematisch gesehen handelt es sich hier wieder um eine Induktion von 3 auf 4. Wie FISCHBEIN schon bemerkt,[79] ist der Schritt von der Problemstellung zum Baumdiagramm für die Kinder leicht einsichtig, nicht dagegen der Schritt vom Baumdiagramm zur Rechnung, der nur bei wenigen VPN spontan auftritt. Es ist sicher, daß das hier benötigte "kombinatorische Zählprinzip" an noch einfacheren Beispielen geübt werden muß.

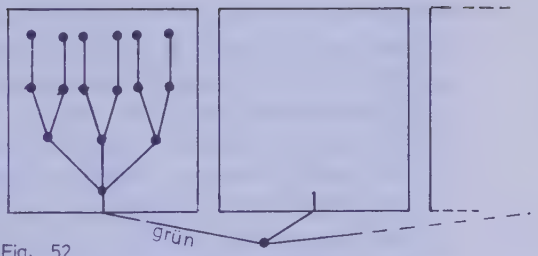


Fig. 52

WINTER etwa gibt folgende Möglichkeit an (mündliche Mitteilung): Die Kinder haben vor sich Kärtchen mit zwei verschiedenen Namen (Otto, Klaus), zwei verschiedenen Verben (geht, läuft) und drei Ortsbestimmungen (ins Kino, zum Fußballplatz, nach Hause) und sollen hieraus alle möglichen Sätze bilden. Nach und nach finden sie unter Anleitung zu einer gezielten Systematik etwa in der Form:

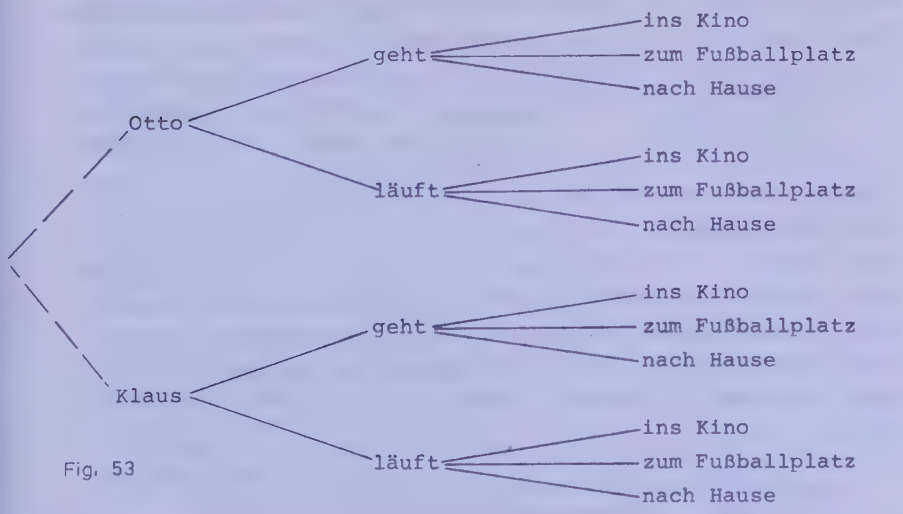


Fig. 53

79) FISCHBEIN/PAMPU/MINZAT 1970a S. 268

FREUDENTHAL berichtet in diesem Zusammenhang (Eger 1973), daß für das Erfassen dieses Zählprinzips schon Kinder frühesten Alters bei einfachen "paradigmatischen" Beispielen fähig sind. FREUDENTHAL:

> "The most striking observation I made with children is the following: I gave them the problem: A, B, C are three towns, A and B are connected by three roads B and C by two roads; in how many ways can I pass from A via B to C? It is not too difficult a problem for kindergarten, though in our teaching system many older children and even grown up people are not able to solve it."

FREUDENTHAL deutet in den letzten Worten an - wie auch FISCHBEIN (1969 S. 295), daß durch das Nichtausnützen der intellektuellen Möglichkeiten in bestimmten frühen Lebensstufen sich der Intellekt falsch orientiert, und fährt fort:

> "Of course I never betrayed the solution, but had the children try hard to find it, and in fact they found it after about half an hour. This policy payd thousandfold. After this one experience the children were able to solve all kind of isomorphic problems with the same and with different numbers in it (such as: given two parallel walls with three and two holes respectevely, a mouse on one side and a piece of cheese on the other, finding the ways the mouse can run to get the cheese)." (Eger 1973)

Ein schöneres, weil aspektreicheres Beispiel, ist im folgenden nach PANKNIN (1972 S. 35) konstruiert: [80]

> "Eine Familie mit drei Personen geht zum Essen. Auf der Speisekarte stehen Suppen (Zwiebelsuppe á DM 2,--, Gemüsesuppe á DM 1,--), Hauptgerichte (Beefsteak á DM 5,--, Kotelett á DM 6,--, Jägerschnitzel á DM 7,--) und Dessert (Pudding á DM 1,--, Torte á DM 2,--, Eis á DM 3,--)."

Wir beginnen etwa mit der Zusammenstellung von Menüs und den zugehörigen Preisen, was den Kindern erfahrungsgemäß viel Spaß macht. Einige Menüs werden unsystematisch mit Klebekärtchen an der Tafel zusammengestellt. Wir bilden Familien mit verschiedenen Menüs und zugehörigen Gesamtkosten etc. Dies sind alles Fragestellungen, die wieder das sogenannte "Fünfminutenrechnen" vollwertig ersetzen. Erst nach solchen vorbe-

---

80) Es läßt sich natürlich auch mit einer "offenen Problemstellung" beginnen; etwa: Eine Familie will für DM 30,-- essen gehen. (Methode der erzeugenden Probleme!) (vgl. WITTMANN 1974 S. 83)

reitenden Aufgaben, betrachten wir eigentliche kombinatorische Probleme, etwa: Finden wir für alle Schüler der Klasse verschiedene Menüzusammenstellungen ? Wie lange braucht Hans, wenn er jeden Sonntag ein anderes Menü zusammenstellt, bis er durch alle Möglichkeiten durch ist? Jemand hat für ein Menü DM 10,-- ausgegeben. Was könnte er gegessen haben? Wir finden unsystematisch die Möglichkeiten (G, K, E), (Z, B, E), (Z, K, T), (Z, J, P). Kann man wohl genaueres sagen, wenn wir wissen, daß der Betreffende gerne Eis ißt, aber keine Zwiebelsuppe mag? Eine Fülle weiterer kombinatorischer Aktivitäten kann sich anschließen. Eine Familie mit 3 Personen A, B, C hat DM 30,-- zur Verfügung. Wie muß man die Menüs zusammenstellen, damit man darunter (oder möglichst dicht an DM 30,--) bleibt? Wie ist es, wenn A keine Zwiebelsuppe ißt, alle Familienmitglieder verschiedene Hauptgerichte nehmen wollen und C kein Eis ißt?

Auf Grund solcher Probleme wächst das Bedürfnis nach Systematisierung. Das wirksame Instrument dafür ist das Baumdiagramm, das wir an der Tafel mit Klebe-, Filz- oder Magnetkarten aufbauen. An Hand des Baumdiagrammes können wir nun die verschiedenen Problemstellungen, die wir vorher oft durch reines Ausprobieren gelöst haben, nun durch systematische heuristische Strategien lösen. Als eine von vielen weiteren Möglichkeiten, arithmetische Rechenoperation zu üben und Schülern klar zu machen, daß verschiedene Wege zum Ziel führen können, bietet sich etwa folgendes an:

Das Familienoberhaupt hat seine Rechnungen über einen langen Zeitraum aufgehoben und Statistik geführt. Die Zahlen, wie oft ein bestimmtes Menü gewählt worden ist, stehen an den Spitzen des Baumdiagrammes. (Fig. 54)

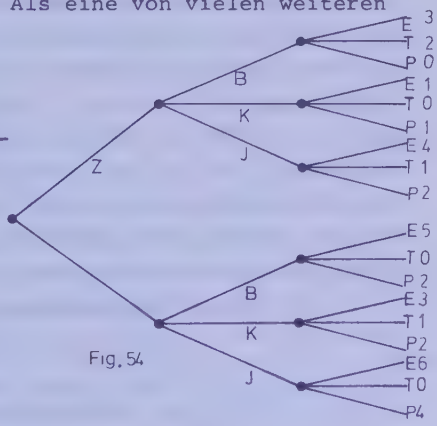


Fig. 54

Mögliche Rechenaktivitäten liegen auf der Hand. Es genügt an dieser Stelle, sie anzudeuten. Zunächst einmal rechnen wir zurück. Wie oft wurde das 1. Hauptgericht gewählt, wie oft das 2. etc? Wir schreiben die entsprechenden Zahlen an die Äste des Baumes. Wir addieren nun die inneren, übereinanderstehenden Zahlen, die mittleren und die äußeren für sich. Was stellen wir fest? Nun nehmen wir einige Zahlen weg, etwa in der Mitte, und versuchen sie aus dem Zusammenhang zu erschließen. Auf Grund der FISCHBEINschen Ergebnisse, wonach den Kindern der intermodale Transfer vom Baum zum Kalkül sehr schwer gefallen ist, ist ein operatives Durcharbeiten solcher Rechenbäume unumgänglich, bevor sie zur Veranschaulichung stochastischer Vorgänge gebraucht werden. Dies beinhaltet auch Rechnungen auf verschiedenen Wegen, wie etwa bei folgendem Problem.

Wir wollen wissen, wie hoch die Gesamtkosten sind. Hierfür gibt es die beiden Möglichkeiten:

(a) Wir multiplizieren den Menüpreis mit den zugehörigen Belegungszahlen und addieren.

(b) Wir multiplizieren die im Laufe der beschriebenen Aktivitäten errechneten Zahlen für die einzelnen Gerichte mit den Einzelpreisen und addieren dann.

Daß beide Rechnungen zum gleichen Ergebnis führen, gibt u. U. Anlaß, das Distributivgesetz an einfacheren Beispielen zu diskutieren. Der beschriebene Problemkontext bietet selbstverständlich die Möglichkeiten, - im Sinne einer "integrierenden Wiederholung" - andere fundamentale Ideen noch einmal zu streifen, wie etwa die Kontrastierung: Abhängigkeit - Unabhängigkeit: Wir stellen etwa die Schüler vor das Problem: Die Familie besteht aus drei Personen; zur Auswahl stehen drei Suppen, drei Hauptgerichte, drei Desserts. Für jedes dieser 9 Menüteile wird ein Kärtchen in der Größe einer Spielkarte angelegt. Die Karten werden gemischt, und jeder darf sich drei Karten ziehen. Die Schüler merken sehr schnell, daß drei Karten-

---

81) vgl. Prinzip des intermodalen Transfers von BAUERSFELD (1972 S. 244)

stapel angelegt werden müssen und daß jeder aus jedem ziehen muß. Hierbei taucht nun das Problem auf: Zurücklegen oder nicht zurücklegen? Welche Unterschiede können sich ergeben? In welchem Fall können wir sofort ausrechnen, was das Familienmahl auf jeden Fall kostet? Wieviel kostet es im ungünstigsten Fall? etc.

Ich will dieses etwas ausführlich behandelte Beispiel abschließen und auf die Tatsache hinweisen, daß bei allen angeführten Aktivitäten der intermodale Transfer[81] zwischen Baum und Kalkül eine tragende Rolle einnimmt. In dem folgenden Beispiel von H. WINTER (1972, S. 107) kommt auch der enaktiv-ikonische Transfer zum ikonisch-symbolischen dazu. Als Motivation dient das Ausfüllen eines Totoscheines. Um die dabei auftretenden kombinatorischen Probleme zu klären, befestigen wir einen Pappstreifen an der Tafel mit senkrecht dazu verlaufenden Schiebern, auf denen die Zahlen 0, 1, 2 stehen. Damit gibt der waagerechte Streifen die jeweilige Tippreihe an. Durch die Schieber wird der Mechanismus der Entstehung von Variationen mit Wiederholungen sichtbar. Der weitere Weg geht über das Malen verschiedener Zustände zum Baumdiagramm.

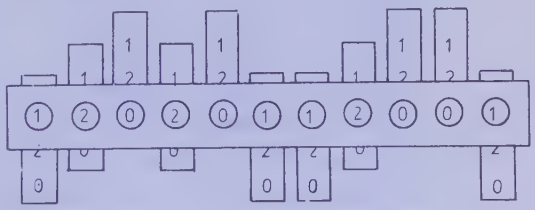
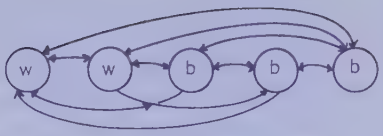
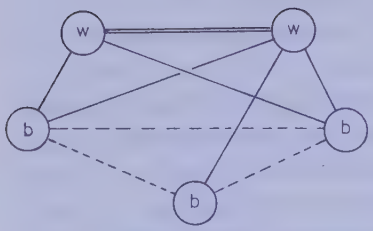


Fig. 55

Oft gibt es zu kombinatorischen Fragen verschiedene Möglichkeiten der Ikonisation. GÖHNER/WEBER (1971 S. 44) geben etwa zum Problem, aus einer Urne mit zwei weißen und drei blauen Kugeln ein Paar zu ziehen, die folgenden vier Ikonisationsmöglichkeiten verschiedener Abstraktionsniveaus an, die je nach Bedarf alle oder nur teilweise verwendet werden.



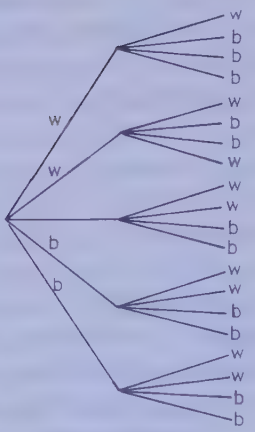
Pfeildiagramm
56c



56 a

	w	w	b	b	b
w		w,w	w,b	w,b	w,b
w	w,w		w,b	w,b	w,b
b	b,w	b,w		b,b	b,b
b	b,w	b,w	b,b		b,b
b	b,w	b,w	b,b	b,b	

56 b



Baumdiagramm
56d

Fig. 56

Eine Reihe weiterer Aktivitäten zu Variationen und Permutationen etc. (mit und ohne Wiederholungen) und die Beziehungen dabei zwischen enaktiver Konstruktionen, "ikonischer Krücke" und symbolischer Rechnung sind in reicher Anzahl bei GÖHNER/WEBER (1971), VARGA (1972), PANKNIN (1972), ENGEL/VARGA/WALSER (1974, FREUND/SORGER (1972) sowie den zitierten Beiträgen von WINTER zu finden.

7. Die Idee der Urne und der Simulation

Aktivitäten hierzu gehören mit zu den wichtigsten überhaupt im Stochastikunterricht. Gibt man zu einem Zufallsexperiment eine "passende" Urne an, so gibt man gleichzeitig in konkreter Form die Ausfallmenge und durch die Zusammensetzung der Urne die anzusetzenden Wahrscheinlichkeiten an, d.h. man geht im Grunde genommen zu einem als isomorph angesehenen Zufallsexperiment über.[82] Dieser Gedanke wird weiterverfolgt. Welche Lostrommel ersetzt den Würfel? Welche Urne den Spinner des Bäckerjungens aus dem Beispiel von Seite 249? Welche ersetzt die Münze? Kann man statt der Urne (W, Z) auch die Urne (W, W, Z) nehmen? Oder die Urne (W, W, Z, Z)? Welche Urne gehört zum Doppelwürfelexperiment? Welche Urne zu den schon erwähnten unsymmetrischen Spinnern? In diesen Zusammenhang gehört auch das im III. Kapitel schon erwähnte folgende Beispiel, das nun noch einmal im anderen Kontext aufgegriffen wird: Eine Urne wird mit 100 Losen gefüllt, davon 20 Gewinne! Ändert sich etwas an der "Erwartung", wenn man 10 Nieten dazulegt? Wenn man 20 Gewinne dazulegt? Was geschieht, wenn die Anzahl der Nieten verdoppelt wird? etc. Diese operative Durcharbeitung bei Änderung einer Variablen ist nötig, um die Mobilität des Schülers angesichts neuer Situationen zu stärken und ihn für die nächsten Probleme, nämlich Änderung zweier Variablen vorzubereiten. Was geschieht, wenn die Zahl der Lose verdoppelt wird, aber die Zahl der Gewinne ebenfalls? [83] Diese Aufgabe ist schon recht schwierig für die jüngeren Kinder. Die Nahebringung ihrer Lösung geschieht in multimodaler Weise, u. U. zunächst mit konkreten Versuchen. Praktisch könnte das so aussehen, daß zwei Schüler gegeneinander spielen.

---

82) Streng genommen ist schon die Angabe des Baumdiagramms zum einfachen Würfelversuch die Zuordnung einer "ikonischen" Urne.

83) Dies läßt sich am eindrucksvollsten bewerkstelligen, wenn die Lose aus Papier sind und nun einfach halbiert werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, kleine Knetgummis verschiedener Farben zu verwenden und sie alle zu halbieren.

Jeder hat eine Flasche mit Kugeln[84] (eine rote unter zweien bzw. zwei rote unter vieren) schüttelt sie und dreht sie dann um. Wer gewinnt auf die Dauer, wenn schwarz verlangt wird? Allerdings ist dieses empirische Spielen nur Vorbereitung für die nächsten Schritte. Vor allem kommt es darauf an, weitere Urnenerzeugungsprozesse zu diskutieren. Wir stellen etwa 1, 2, 3... (2:4) Flaschen nebeneinander und schütten sie zusammen. Ändern sich die Chancen?[85] Dieses Vorgehen entspricht der "grouping technique" von PIAGET und FISCHBEIN, durch die jedes einzelne Verhältnis etwa am Hundertersteckbrett erarbeitet wird. Da, wie PIAGET schon festgestellt hat, Kinder dazu neigen, bei Vergleichen A/(A+B) und C/(C+D)[86] die Vergleiche A : B mit C : D anzustellen, ist es günstig, auf dem Steckbrett für die Gewinne eine einzige Farbe, dagegen für die Nieten mehrere Farben zu benutzen. Wir vergleichen beispielsweise die beiden Urnen 5 : 15 und 10 : 30. Zunächst liegen die Stecker noch ungeordnet auf dem Steckbrett. Die Kinder werden nun angeleitet, die Stäbchen zu stecken und zu Vergleichen möglichst günstig

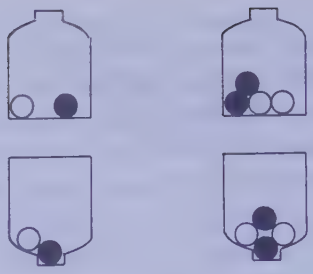


Fig. 57

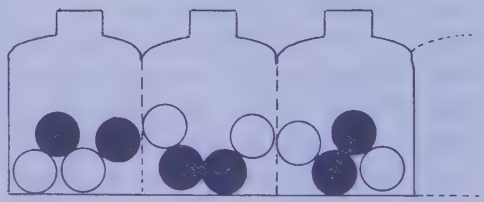


Fig. 58

---

84) vw. S. 233

85) Es ist zu beachten, daß sich hier die Chance "Rot" zu ziehen, nur deswegen nicht ändert, weil die Zahlenproportionen in allen Urnen gleich sind.

86) (d. h. A Gewinne, B Nieten bzw. C Gewinne und D Nieten)

umzustrukturieren, etwa in nebenstehender Form. Allerdings ist auch bei diesem Vorgehen wieder darauf zu achten, daß sich nicht unerwünschte Intuitionen festsetzen, etwa daß die Kinder glauben, diese Reihenfolge stelle sich beim tatsächlichen Ziehen ein. Nach unseren Erfahrungen ist diese Gefahr jedoch gering, wenn vorher tatsächlich Urnen etwa nach dem Prinzip "weiß-weiß-schwarz, weiß-weiß-schwarz, weiß-.... etc. zusammengestellt werden und dann gezogen wird.

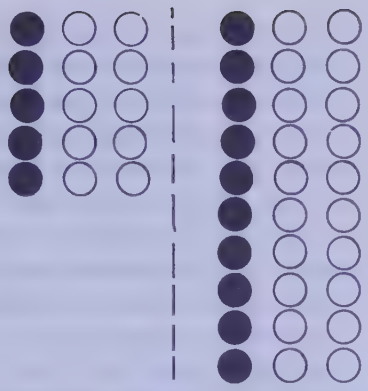


Fig. 59

Eine weitere Möglichkeit, Größenverhältnisse bzw. Wahrscheinlichkeiten zu vergleichen, besteht im Ausnutzen der Isomorphie von Spinnermodell und Urnenmodell. Zunächst einmal werden links der VARGAschen Wahrscheinlichkeitsskala [87] auf Klebekarten verschiedene Spinner angeordnet. Auf anderen Karten geben wir die Urnen 2 : 5, 1 :3 etc. vor. Zu welchem Spinner gehört die erste Urne, zu welchem Spinner gehört die zweite Urne etc....?

Mit diesem Beispiel sind wir schon beim Punkt "Isomorphie" bzw. "Simulation". Im Grunde kamen bei den schon beschriebenen Aktivitäten immer wieder Simulationen vor, allerdings mehr von dem Aspekt her, daß das tatsächliche Zufallsexperiment nicht ausgeführt, sondern nur simuliert wird, d.h. ein Zufallsgenerator durch einen anderen ersetzt wird.

Wichtig, vor allem ab Orientierungsstufe sind Simulationen, die ausgeführt werden, weil die zu Grunde liegenden Probleme analytisch (noch) nicht behandelt werden können. Höchst in-

---

87) vw. Seite 234

teressant sind die Beispiele von ENGEL (1971a, 1973, 1974), in denen

ein Käfer auf einem Tetraeder"zufällig" an jeder Ecke abbiegt und irgendwann der Spinne in einer bestimmten Ecke zum Opfer fällt. (mittlere Lebensdauer?)
Steinchen zufällig in einer Glasschmelzmasse verteilt werden (vgl. S. 69)
sechs Jäger "zufällig" auf sechs Enten schießen (wieviele überleben erwartungsgemäß?)
etc...

An der Relevanz solcher Aufgaben in der Orientierungsstufe besteht kein Zweifel. Sicherlich sollten aber auch in der Grundschule noch elementarere Simulierungen,- ohne Akzent auf der Bestimmung von Erwartungswerten durchgeführt werden. Es ist hierbei eher auf den Begriff "zufällig" abzuheben und insbesondere auf das Problem, daß durch verschiedene Simulierungen (u.U. sogar mit dem gleichen Zufallsgenerator) verschiedene Ergebnisse eintreten können. Hierzu ist ein schönes Beispiel etwa bei PANKNIN (1972 S. 31) :

> "Beim Sportfest sollen 32 Schüler in vier Riegen aufgeteilt werden. Der Lehrer überlegt sich, daß er dazu ein Skatblatt nehmen kann und jeden einzelnen Schüler nacheinander ziehen lassen kann."

Eine solche Problemstellung, die natürlich in sehr viel offenerer Form gegeben werden kann, führt in zwangloser Weise zu einer Diskussion einmal darüber, daß sich verschiedene Ergebnisse einstellen können, je nachdem, ob die Karten in den Stoß zurückgelegt werden oder nicht, zum andern über weitere Möglichkeiten, das Auswahlverfahren"zufällig"zu gestalten.

8. Zufallsvariable

Wie bei der Anbahnung der bisherigen Ideen erscheint es auch beim Begriff der Zufallsvariablen optimal, an Hand aspektreicher Situationen ein ganzes Feld von Aufgaben aufzurollen, insbesondere auch Standardrechenaufgaben in neuer Verkleidung. Wir beginnen etwa mit dem Beispiel des doppelten oder dreifachen Würfelwurfes, das wir schon an anderer Stelle, nämlich in Zusammenhang mit der stochastischen Unabhängigkeit, ausführlich diskutiert haben, legen nun aber das Schwergewicht auf Zufallsvariable. Der Einstieg kann wieder geschehen, indem die Kinder würfeln und angeben, wie groß die Summe S der Augenzahlen, wie groß das Produkt P der Augenzahlen ist. Kann man die Summe der verdeckten Augenzahlen ohne Nachschauen sofort angeben? Paul hat mit zwei Würfeln zusammen S = 9 geworfen. Was könnte er wohl gehabt haben? Er verrät, daß die eine Zahl gerade war. Nützt uns das etwas? Wie sieht es aus, wenn wir wissen, daß einer der beiden Würfel mindestens 5 angezeigt hat?

Peter hat mit drei Würfeln zusammen als Produkt 36 erhalten. Was könnte er geworfen haben? Der erste Wurf war übrigens eine gerade Zahl (eine Zahl größer als 5, eine Zahl, die durch 2 und 3 teilbar ist... etc.) Nützt uns das etwas?

Wir würfeln nun zusammen und zeichnen an der Tafel das nebenstehende Flußdiagramm, in das die gewürfelten Zahlen (in die oberen drei Kreise) eingetragen werden. Wo müssen (in den oberen Kreisen) die Zahlen hin, damit als Ergebnis eine möglichst große Zahl (eine möglichst kleine Zahl ...., eine möglichst große gerade Zahl etc.)

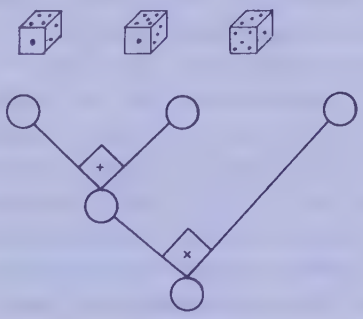


Fig. 60

herauskommt?

Nun werden die oberen Zahlen vorgegeben. Welche Operationszeichen müssen in die eckigen Kästchen bei ähnlichen Fragestellungen wie oben?

Beim nächsten Schritt können bei jedem Wurf die gewürfelten Zahlen und ebenso die Operationszeichen beliebig eingesetzt werden.[88]

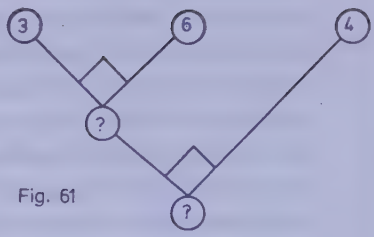


Fig. 61

Umkehraufgaben (propädeutsches Gleichungslösen!) bieten sich an wie in Fig .62

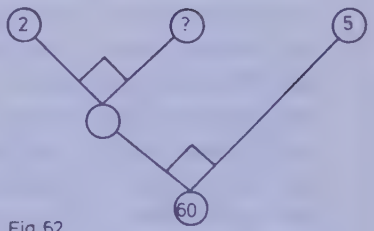


Fig.62

Es gibt noch eine Reihe weiterer solcher Aktivitäten, die jeder Lehrer selbst erfinden kann. Nicht ohne Grund schreibt GOSMAN (1973, S.330) "The dice are loaded with activities...". Sobald die Situation vertraut ist (Redundanzprinzip!), bringen wir auch wahrscheinlichkeitsbezogene Aufgabenstellungen in den Unterricht ein. Wir geben zwei Flußdiagramme vor (Fig. .63): Bei welchem ist die Chance, eine gerade Zahl (eine Primzahl, eine Dreierzahl etc....) als Ergebnis zu erhalten, größer? (Prinzip der integrierenden Wiederholung!)

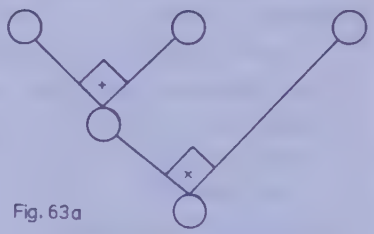


Fig. 63a

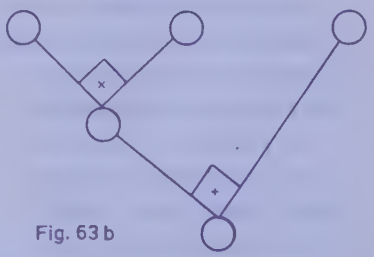


Fig. 63 b

Für das Standardbeispiel des doppelten Würfelwurfes wird von

88) Dieses kleinschrittige Vorgehen wird an dieser Stelle nur aus technischen Gründen praktiziert und soll nicht zum Dogma erhoben werden. Ebensogut ist ein anderes Vorgehen möglich.

den meisten Autoren graphische Darstellung vorgeschlagen, entweder in der noch relativ anschaulichen Form der Gitterdarstellung von Fig.64 oder in der schon abstrakteren Form von Fig.65.
Wir haben gute Erfahrungen damit gemacht, über diese Gitterdarstellungen auf transparenten Blättern die Werte der Zufallsvariablen S (= Summe=) und P (= Produkt=) eintragen zu lassen. (Fig.66) Fragestellungen: Wo liegen alle Würfe mit der Augensumme 6? Wo liegen die mit S = 8? Was fällt auf? Woher kommt die Symmetrie?

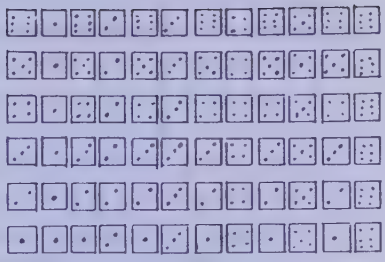


Fig. 64

6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6

Fig. 65

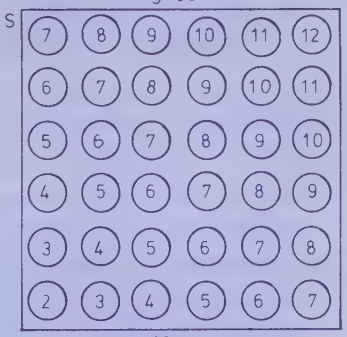


Fig.66

Die Diskussion der Symmetrie zur Hauptdiagonalen, sowohl bei P als auch bei S führt zu Fragen von Verknüpfungseigenschaften.

Die ikonische Darstellung gestattet es, schon auf Grundschulebene[89] Probleme der folgenden Art zu behandeln; Spieler A gewinnt, wenn das Augenprodukt (bei zwei Würfeln) größer als 17 wird, B wenn die Augensumme zwischen 4 und 8 ist. Wer hat die besseren Chancen? Die Gewinnmengen werden auf den transparenten Arbeitsblättern eingefärbt und nach ihren Mächtigkeiten verglichen.

Mathematisch gesehen stecken sehr viele Aspekte in diesen Aktivitäten zum Problemfeld der letzten Seiten, wovon ich hier nur aufzählen will: Erfassung logischer Strukturen (S > 4 und S < 8), Aussonderung von Teilmengen (Färben!), Addition und

89) Bei Zugrundelegung des naiven, qualitativen Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Was mehr Möglichkeiten hat, ist wahrscheinlicher.

Multiplikation von Zufallsvariablen (Flußdiagramme!), Angabe von Lösungsmengen zu P = X·Y > 17) bzw. die Angabe von Urbildmengen von Intervallen bzgl. der Zufallsvariablen P und S.[90]

Analog zu früheren Vorgehensweisen[91] betrachten wir es als nötig, auch bei der Frage der Verteilungen von P und S apriorisch und empirisch vorzugehen. Wir stellen also sowohl ein Histogramm auf (Fig. 67), in das wir die Zahl der Möglichkeiten für jeden angenommen Wert von S eintragen, als auch ein Diagramm (Fig. 68), in das wir die tatsächlich

Fig. 67

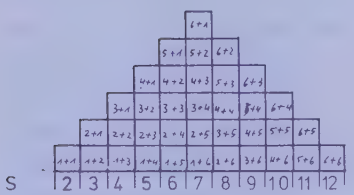


Fig.68a

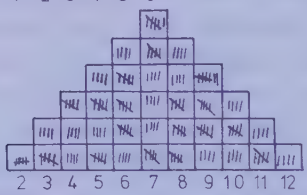


Fig. 68b

erhaltenen Häufigkeiten - relativ oder absolut (je nach Stufe) - eintragen.[92] Dies ist insbesondere deswegen not-

---

90) Daß hier Zufallsvariablen als Abbildungen gedeutet werden, in der Praxis aber oft nur die Verteilungen von ZV, nicht aber die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfelder eine Rolle spielen, ist keine Verletzung des Kontinuitätsprinzips, da wir Zufallsvariablen an dieser Stelle ja nicht als Abbildungen explizieren und bei unseren Aktivitäten ja auch andere Ziele in Zusammenhang mit dem regulären Stoff intendieren.

91) vgl. Seite 251ff

92) in den Betrachtungen zum Gesetz der großen Zahl wird eine Möglichkeit angegeben, ohne relative Häufigkeiten die Stabilisierung der Verteilungskurve bei steigender Versuchsanzahl zu erleben, die im wesentlichen auf der Idee des Galtonbretts beruht. (vgl. S.277)

wendig, weil sich hieran am klarsten sowohl die Trennung zwischen Modell und Realität zeigt, andererseits sich aber eine Bestätigung des Modells durch empirische Ergebnisse manifestiert.

Im täglichen Leben spielen Zufallsvariablen oft eine wichtige Rolle bei Glücksspielen, z. B. als Spielgewinne. Es bietet sich an, solche konkreten Problemsituationen wie die folgende von WINTER[93] in den Unterricht einzubringen:

> "Im Vergnügungspark kostet das einmalige Würfeln an der Würfelbude 20 Pf. Geworfen wird mit zwei Würfeln. Man gewinnt, wenn die gleiche Augenzahl auf beiden Würfeln erscheint oder wenn die Gesamtzahl 10 ergibt. Die Gewinne haben einen Wert von 50 Pf."

Wir fragen uns, wieviel der Besitzer wohl gewonnen hätte, wenn wir unsere empirische Verteilung von Fig.68 zugrundelegen. Wer hätte insgesamt etwas gewonnen? Wer verloren? Wie wirkt es sich aus, wenn die Preise verdoppelt werden, wie, wenn die Gewinne verdoppelt werden? Wie, wenn beides verdoppelt wird? Was ändert sich, wenn wir zu einem neuen Spiel übergehen?.... Isomorphe Problemsituationen bieten sich an, etwa: Ein Zufallsgenerator besteht aus zwei sich unabhängig voneinander drehenden Spinnern (Fig. 69) mit den Zahlen 1 - 6 etc. (Fragestellungen wie bisher.

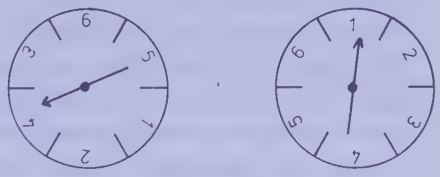


Fig. 69

In der Orientierungsstufe können weitere Fragestellungen erarbeitet werden, etwa: Was ist auf die Dauer zu erwarten bzw. wie groß ist der zu erwartende Überschuß des Besitzers? Wie groß ist der zu erwartende Verlust des Spielers? Bei diesem Problemkontext werden die Fragestellungen im allgemeinen durch gezielte Lehrerimpulse ausgelöst bzw. evtl. sogar vorgegeben. Es scheint auch denkbar - aber das dürfte von der Klasse ab-

---

93) WINTER/ZIEGLER 1970a S.197

hängen - mit einer relativ offenen Fragestellung zu beginnen, etwa:[94]

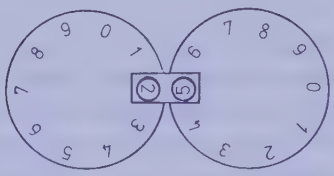


Fig. 70

Wir haben einen Zufallsgenerator wie oben. Wie muß der Gewinnplan aussehen, damit sich ein Reingewinn von ca. 30 % ergibt? (Fig. 70)

Für Grundschulniveau sind jedoch Fragestellungen an Lostrommeln eher angemessen, da im Gegensatz zu den obigen Beispielen, die Population, aus der die Stichproben entnommen werden[95], endlich gewählt werden kann. Beispielsweise lassen wir die Kinder selber Lostrommeln zusammenstellen mit Preisen und Gewinnen. Eine Lostrommel könnte z. B. so aussehen, daß darin 100 Lose mit 90 Nieten sind. Ein Los soll 50 Pf kosten. Für einen Gewinn erhält man einen Preis im Wert von DM 3,--. Damit haben wir eine Ausgangssituation, die sich ausbauen läßt zu einem Problemkontext und Raum für vielfältige Fragestellungen, wie etwa: A hat 10 Lose gekauft, darunter 1 Gewinn. Nettogewinn bzw. Nettoverlust? B hat bei seinem Kauf insgesamt DM 2,-- verloren. Wieviel Gewinnlose bzw. Nieten kann er gekauft haben? Bei den ersten 50 Losen waren 10 Gewinne. Peter kauft den Rest der Lose. Lohnt es sich für ihn?

Beim Aufstellen der Gewinnpläne bzw. Füllen der Lostrommeln können wir zwangslos schon bekannte Lehrgegenstände in neuem Zusammenhang üben, indem wir als Grundmenge die Zahlen von 1 - 100 auf Zetteln in die Lostrommel legen und verschiedene Gewinnregeln durchspielen z. B.: Alle Neunerzahlen gewinnen mit

---

94) vgl. WITTMANN 1974 S. 119

95) eine Würfelserie ist im Grunde nichts anderes als die Entnahme einer Stichprobe aus einer unendlichen Population.

DM 3,-- (Teilbarkeit!)

Alle Zahlen, deren Einerziffer gleich der Zehnerziffer ist, "gewinnen mit der Quersumme"[96] (Stellenwertsystem!)

Alle Zahlen, die echte Vielfache von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sind, sind Nieten. Die übrigen sind Gewinne. (Sieb des Erathostenes!)

Im Zusammenhang mit Simulationsaufgaben gibt es in der Literatur eine Fülle von Anregungen, Erwartungswerte der Spieldauer von (Ruin-)spielen unterrichtlich schon ab Orientierungsstufe zu behandeln.[97] Für die Grundschule gibt es hierfür wenige so elementar behandelbare Beispiele wie das "Torspiel", auf das wir schon an anderer Stelle eingegangen sind. Es ging bei diesem Spiel um einen Spielplan der nebenstehenden Art, den wir vertikal an der Tafel anbringen. (Fig.71) Senkrecht dazu wird eine Skala für die Spieldauer angebracht. Zufallsgenerator ist etwa eine LAPLACEmünze. Bei 1 darf ein Feld vorgegangen werden, bei 0 muß der Spieler eine Pause einlegen. Wer schießt das erste Tor? (= Ruin für den anderen=).

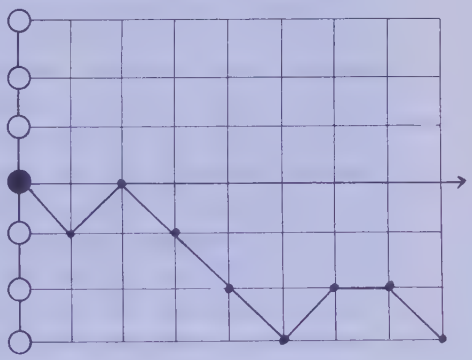


Fig.71

Für Grundschüler ist hierbei die Anbahnung zweier Ideen, aber nur in rudimentärer Form, zu erstreben:

(a) Beide Probleme, Ruinproblem und Irrwegproblem sind isomorph

(b) kurze Wege (=kurze Spieldauer=) und lange Wege sind selten. Die meisten Spiele enden nach einer mittleren Spieldauer. (=intuitive Erfassung der Idee des Erwartungswertes=).

---

96) z. B. 22 bringt einen Gewinn von DM 4,--

97) vgl. etwa ATHEN o. J. S. 41

9. Aussagen der großen Zahl

Im Grunde genommen spielte das Prinzip der großen Zahl in viele schon beschriebene Aktivitäten hinein. Auf Grund seiner erkenntnistheoretischen Bedeutung "...individuelle Freiheit bei kollektivem Zwang..." ist es dennoch gerechtfertigt, ihm einen eigenen Abschnitt zu widmen.

Die Stabilität einer Zufallsfolge (=kollektiver Zwang=) durch empirische Versuche nachzuweisen, glückt oft nicht so gut, wie manche Textbücher dem Lehrer weismachen wollen. Jedenfalls ist ein großer Aufwand nötig, um tatsächlich die "Konvergenz" der relativen Häufigkeiten zu erleben. In der Grundschule ist die weitere Schwierigkeit, daß keine Brüche vorausgesetzt werden dürfen und so die übliche Darstellung der relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Versuchsanzahl im kartesischen Koordinantensystem entfällt. Trotz dieser Schwierigkeiten ist folgendes Vorgehen möglich; sofern man den zur Bestätigung des Prinzips der großen Zahl enormen Aufwand, der aus grundsätzlichen Gründen nicht vermeidbar scheint, nicht scheut!

Wir beginnen mit einem Klassenexperiment. Die Schüler würfeln und registrieren die gewürfelten Werte z. B. in Form von Strichlisten. Für sehr junge Kinder, die noch nicht zählen können, nimmt man Würfel, auf deren Seitenflächen Tiere gezeichnet sind und bereitet Arbeitsbögen mit Quadrateinteilung vor. Jedes "Tier", dessen Bild gewürfelt wird, darf einen Schritt vor. Die Kinder machen dafür ein Kreuz oder einen Punkt. Nach jeweils zwölf Würfen werden die entsprechenden Felder verbunden, z. B. so:

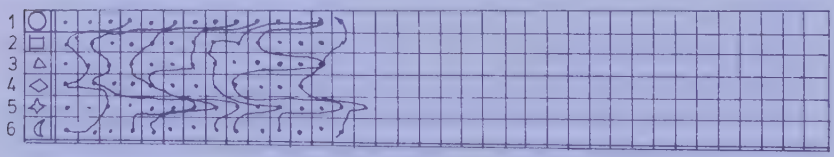


Fig. 72

Während die Kinder anfangs noch auf ihren 'Favoriten' tippen, merken sie im Laufe des Spieles vielleicht schon, daß es einen solchen nicht gibt. Zwar kommt es immer wieder einmal vor, daß ein "Tier" weit vorne liegt, aber das gleicht sich im Laufe mehrerer Blätter aus. Legt man die Blätter hintereinander an der Tafel aus, so können die Kinder, da sie optisch-figural die Lauflänge vor Augen haben, sehen, daß die Enddifferenzen relativ zur gesamten Lauflänge klein sind und sich eine zunehmende Regelmäßigkeit ergibt.[98] Handgreiflicher und überzeugender nach unseren Erfahrungen ist folgendes Vorgehen: Wir bauen auf einem Brett (Fig. 73) sechs Glasröhrchen auf. Für jedes Ergebnis kommt ein entsprechendes Reiskorn in das entsprechende Rohr. Die Kinder können nun zu jeder Zeit würfeln und "erleben", wie sich die sechs "Ereignissäulen" immer regelmäßiger auffüllen. Möglicherweise bedarf es eines solchen Aufwandes, um auch die letzten zu überzeugen, daß es keinen von Anfang an begünstigten Favoriten gibt und sich die Niveauunterschiede auf die Dauer ausgleichen.[99] Für eine Weiterführung bieten sich Galtonbretter, auch in Form von Spielen an, an denen Symmetrieverhältnisse erarbeitet werden können und wo nach ähnlichem Vorgehen wie oben das Prinzip der großen Zahl bestätigt werden kann. (vgl. S.286).

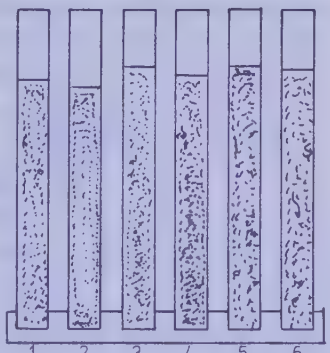


Fig. 73

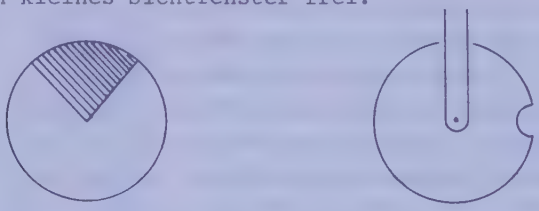
---

99 FREUDENTHAL gibt eine andere Möglichkeit an (vgl. S.307f)

98) Dabei ist für die absoluten Differenzen durchaus ein Ansteigen zu erwarten.

10. Die Idee der Stichprobe

Ganz isoliert von den anderen Ideen können wir auch die Idee der Stichprobe nicht betrachten. Im Grunde kommen schon einfache Stichprobenentnahmen vor, wenn wir Urnenziehungen praktisch durchführen. "Unter Stichprobenverfahren" im engeren Sinne wollen wir jedoch solche Aktivitäten verstehen, bei denen wir auf Grund von Stichproben Informationen bekommen wollen über die unbekannte Zusammensetzung einer Grundgesamtheit (=Urne=). Hierzu ist beispielsweise folgendes Vorgehen gut geeignet: Wir bringen einen Spinner mit, der aus zwei Scheiben besteht. Die untere bewegliche Scheibe ist wie üblich in Farbsektoren eingeteilt, die obere Scheibe, unter der sich die untere dreht, hat am am Rande ein kleines Sichtfenster frei.



a. Fig. 74 b

Wir lassen die Schüler Hypothesen bilden. Sieht die Einteilung so aus oder so?

Spinner 1 Spinner 2

Fig. 75

Welches Ergebnis ist zu erwarten, wenn der Spinner die Form 1 hat, welches, wenn er wie 2 aussieht? Wir machen Versuche und registrieren in Form von Strichlisten. Eine Klassendiskussion schließt sich zweckmäßigerweise an, in denen aufgeworfene Fra-

gen erörtert werden. Kann man nach 10 Würfen schon sicher sein? Wie ist es bei 50 Versuchen?

Dieses Vorgehen trifft genau die Hauptprobleme der mathematischen Statistik, wie sie im I. Kapitel formuliert wurden. Durch diese Aktivitäten soll der Schüler zunächst einmal das Grundprinzip von statistischen Analysen an einem sehr einfachen Beispiel erfahren, aber auch schon die Problematik, die in zu kleinen Stichproben steckt. Günstig für das letztere ist das Vorhandensein eines Satzes von verschiedenen Spinnerblättern. Man deckt etwa beim ersten Spinnerblatt nach wenigen Versuchen die Lösung auf, und läßt die Schüler so spüren, welche Irrtümer man begehen kann, wenn man schon nach wenigen Ziehungen ein endgültiges Urteil fällt.

Das Spinnerblatt wird gegen ein anderes ausgetauscht, etwa das Nebenstehende. Wir machen eine längere Serie von Ziehungen und registrieren sie an der Tafel. Dann decken wir auf und diskutieren die Ergebnisse. Wieviel Einsen und wieviel Nullen wären eigentlich nach 10, 20, 30 ..... Würfen zu erwarten gewesen? An welchen Stellen deckt sich das Ergebnis gut mit unserer Erwartung? An welchen Stellen nicht? Ist evtl. ein Trend sichtbar? Da sich der Zufall nicht lenken läßt und solche Versuche nicht im voraus voll kalkulierbar sind, gehört viel Fingerspitzengefühl des Lehrers und Improvisationskunst dazu, diese Aktivitäten durchzuführen.

Fig. 76

In der Orientierungsstufe kann man schon eher mit relativen Häufigkeiten arbeiten und sie graphisch aufzeichnen. Hierdurch erfahren die Schüler noch einmal die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit und des Prinzips der großen Zahl. FISCHBEIN u. a. (1969 S. 20) beschreiben hierzu eine fundamentale Aktivität. In einer Urne sind etwa 200 weiße und 100 rote kleine Bohnen. Mit einem kleinen Glas, in das ca. 60 Bohnen passen, werden Stichproben

(mit Zurücklegen!),durchgeführt. Die relativen Häufigkeiten für "rot" lassen sich berechnen, bei einer Schrittweite von ca. 0,03 - 0,04 graphisch auftragen und ergeben eine Normalverteilung um den Mittelwert 0,33. (Fig. 77).[100]

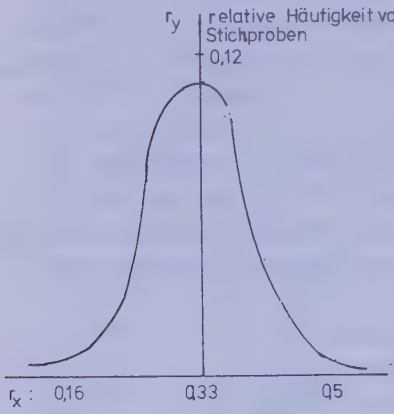


Fig. 77

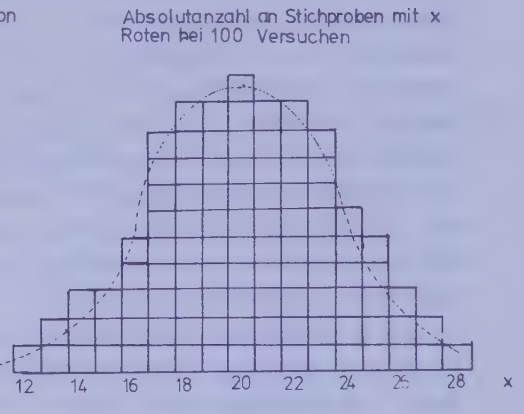


Fig . 78

Im Primarbereich ist dies leider nicht möglich. Dennoch kann man hier wenigstens die Absolutzahlen von roten Bohnen graphisch in Form eines Säulendiagrammes (Schrittweite 1 - 2) darstellen (Fig.78) und eine Reihe von Feststellungen treffen. Stichproben mit 5 roten Bohnen, oder 40 roten sind selten, solche mit 18, 19, 20... häufig. Wieder liegt eine Normalverteilung in elementarer Form vor. Als nächstes werden die Stichprobengrößen durch Verwendung kleinerer und größerer Bechergläser variiert und die Ergebnisse diskutiert.

Ob man bei allen diesen Aktivitäten von den Stichproben auf die Grundgesamtheit schließt oder umgekehrt aus der Kenntnis der Grundgesamtheit heraus das mathematische Modell der Wahrscheinlichkeitsrechnung testet, ist sicher keine Alternativfrage, sondern bezieht sich eher darauf, welcher der beiden Aspekte in der einen oder anderen Stunde dominiert.

---

100) r_y ist die relative Häufigkeit von Stichproben mit einem "relativen Rotanteil" r_x. Dabei ist r_x gleich Anzahl der roten Bohnen in einer Stichprobe, dividiert durch Stichprobenumfang

FISCHBEIN sieht den Wert solcher Aktivitäten in mehreren Punkten:

> "... les éleves acquièrent ainsi le sens statistique du concept des probabilité et réciproquement, l'idée de l'existence d'une tendance constante qui oriente la succession des événements aléatoires. On a créé, de cette manière, les conditions pour la fusion de l'aléatoire et du nécessaire, qui est, du point de vue psychologique, la base du concept de probabilité." (FISCHBEIN u. a. 1969 S. 20)

Indessen sind die Unterrichtsziele bei solchen Stichprobenverfahren nicht nur auf das Kennenlernen intuitiver, stochastischer Modelle beschränkt, sondern vielmehr fächerübergreifend:

> "... mais ce que nous voulons souligner, c'est le fait que l'initiation expérimentale au domaine des probabilités représente une occasion extraordinaire pour familiariser les enfants avec les concepts fondamentaux de la science: prévision, expérience et vérification, nécessité et hasard, certitude et probabilité, loi et loi statistique, connaissance par induction." (ibid. S. 21)

Schon in sehr frühem Altersstadium können auch durchaus reale statistische Zählverfahren angewandt werden. Gibt es mehr VW oder mehr Fahrzeuge von Ford? Die Kinder zählen zu Hause Stichproben von ca. 50 Autos aus. Wollen wir anschließen an die Bohnenziehungen, können wir die Kinder auch eine Urne anlegen lassen. Für jeden VW kommt eine rote Bohne, für jeden Opel eine weiße Bohne in ein kleines Glas. In der Schule werden alle Stichproben zusammengeschüttet, nachdem die Zusammensetzung jeder Stichprobe aufgeschrieben worden ist. Ein Kind hat vielleicht besonders viele Opel. Es stellt sich heraus, daß es zu Schichtwechsel an der Zufahrtsstraße zum Opelwerk gezählt hat.

In ganz natürlicher Weise wird so das für statistische Verfahren fundamentale Prinzip der zufälligen Auswahl bzw. der dabei eine Rolle spielenden Fehlerquellen angeschnitten.

Allerdings darf nicht unterschlagen werden, daß Grundschulkinder oft enorme Schwierigkeiten haben, statistische Schlüsse von Stichproben auf eine unbekannte Population zu ziehen. Verführerisch erscheint beispielsweise folgendes: wir haben eine

Population von 20 roten und 60 weißen Murmeln und ziehen verschiedene Stichproben mit verschiedenem Umfang. Selbst wenn sich dabei recht einfach erscheinende Verhältnisse wie 2 : 6, 3 : 10, 6 : 20... ergeben, kommen wenige Grundschulkinder spontan auf die plausibel erscheinende Hypothese, daß in der Population dreimal mehr weiße als rote Murmeln zu erwarten sind. Vermutlich liegt der Hauptgrund für diese Unfähigkeit der Kinder darin, daß die Population nicht in ihrem Sichtfeld ist, ebensowenig wie die schon zurückgelegten Stichproben. Die Kinder sind zentriert auf die gerade eben gezogene Probe und nicht fähig, aus der Versuchsreihe eine Regelhaftigkeit zu erschließen. Für diese Erklärung spricht, daß Kinder recht gut von der Stichprobe auf die Population schließen können, wenn beides optisch (auch in ihrer gegenseitigen Beziehung) gegenwärtig ist, wie bei der folgenden Aktivität: (Idee von G. Müller, Dortmund)

Auf einem Tageslichtprojektorbogen liegen rote und weiße sehr kleine Chips in großer Anzahl (Fig. 79) Wieviele rote und weiße mögen es wohl sein? Der Lehrer legt in Form eines stummen Impulses ein zweites Blatt in Form eines Gitternetzes auf das erstere (Fig. 80). Es werden einige Stichproben gezählt. Durch Multiplikation erhält man die Gesamtpopulation. Sehr viel Diskussionsstoff bietet sich zu dieser Aktivität an. Etwa die Frage, ob jede Stichprobe erlaubt ist? Oder das Blatt wird so lange geschüttelt, bis die Mehrheit der Chips in einem Teil des Blattes ist. Kann man nun aus einer Stichprobe Schlüsse

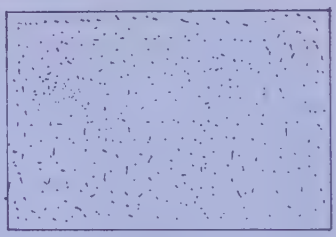


Fig. 79

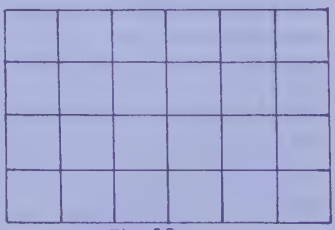


Fig. 80

ziehen? Wie muß die Verteilung aussehen, damit die Stichprobenmethode "erlaubt" ist?

Das Beispiel zeigt einerseits sehr schön, wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine geometrische Idee (Flächeninhalt!) und eine arithmetische Idee (Stichprobenumfang!) verknüpft werden können. Zum anderen bieten sich später isomorphe Aufgaben an, die sogar im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts wirkdam sein können. Z. B. möchte der Arzt gern wissen, wie viele rote und weiße Blutkörperchen jemand hat. Wie geht er wohl vor? etc.

Eine höchst interessante, auf einer Aufgabe des polnischen Mathematikers STEINHAUS beruhenden Aktivität, die sogar für die Orientierungsstufe recht anspruchsvoll ist, wird im MATHEMATISCHEN LABOR modelliert:

In einem Fischteich ist die Anzahl der Fische zu bestimmen. Um diese Situation nachzumodellieren (simulieren!) bauen wir aus je zwei hellen Legosteinen Fische und legen sie in einen mit einer handgroßen Öffnung versehenen Karton. Wir ziehen eine Stichprobe. Die gezogenen Fische werden markiert, indem der vordere Legostein ausgetauscht wird und durch einen dunklen ersetzt wird. Wieder wird eine Stichprobe gezogen, unter der sich auch markierte Fische befinden. Was ist der beste Schätzwert?[101]

Die Problemstellung ist somit klar. Die Kinder sehen auch zwar sehr schnell ein, daß man wohl Aussagen über die Mindestanzahl der Fische treffen kann, haben aber große Mühe, eine Strategie zu finden - auf Grund meiner Erfahrungen bestenfalls zu Ende der Orientierungsstufe und auch nur dann, wenn sorgfältige Vorbereitungen getroffen werden. Es ist plausibel, die bisherigen Erfahrungen auszunützen, daß eine Beziehung zwischen Stichprobe und Grundgesamtheit offenbar dann am ehesten erkannt wird, wenn beide optisch simultan erfassbar sind. Weiterhin nützen wir das operative Prinzip, indem wir die inverse Operation betrachten

---

101) Es muß natürlich gewährleistet sein, daß immer der gleiche Schüler zieht, der dann auch nicht an der Diskussion teilnehmen darf, weil er ja die Zahl der Fische in etwa "fühlt".

(Schluß von der Population auf die Stichprobe!).

Wir bereiten Arbeitsblätter vor, auf denen eine Gesamtpopulation einschließlich markierter Fische eingezeichnet ist. Die Kinder entnehmen mit einem kleinen Glas, das sie mit geschlossenen Augen aufsetzen, eine Reihe von "Stichproben" und notieren sich die Ergebnisse.[102] Ganz allmählich schält sich die Erkenntnis heraus, daß in den meisten Stichproben ungefähr gleich viele unmarkierte und markierte Fische vorhanden sind (wenn wir unser Beispiel zugrundelegen). Damit ist die folgende Argumentation schon eher plausibel:

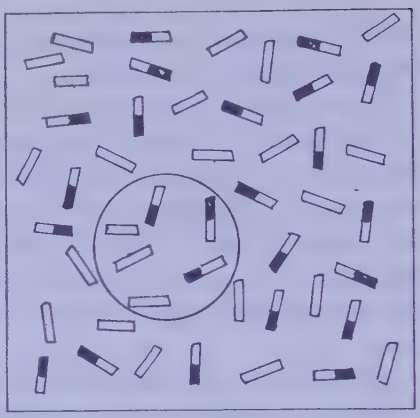


Fig. 81

> Wenn in der Stichprobe die Hälfte markiert ist, ist dasselbe von der Population zu erwarten... Und damit brauchen wir nur die Zahl der markierten Fische zu verdoppeln, um auf die Gesamtzahl zu kommen.

Ein außerordentlich wichtiger Aspekt tritt auch bei der letzten Aktivität zu Tage: nämlich daß Stichproben zufällig sein sollten, daß aber Streuungen unvermeidlich sind und nicht in jeder Stichprobe notwendigerweise die Zahlverhältnisse der Population zu erwarten sind. Daß Stichproben bei schlechter Planung sogar als nichtrepräsentativ zu erwarten sind, können Kinder schon ab der Orientierungsstufe erfassen. Das folgende Beispiel ist von WINTER:[103]

> "Ralf überquert jeden Morgen auf seinem Schulweg etwa zur gleichen Zeit eine Eisenbahnlinie. Er fand in den letzten 100 Tagen die Schranke siebzigmal geschlossen. Er sagt: Die Schranke ist am Tag etwa 0,7 x 24 Std. = 16,8 Std. geschlossen. - Was hat Ralf nicht beachtet?"

---

102) vgl. Vorgehen bei FISCHBEIN u. a. 1969 S. 20

103) WINTER/ZIEGLER 1971b S. 85

Ein noch schöneres Beispiel stammt von FREUDENTHAL:[104]

"In einer Klasse erhebt sich das Problem, wie groß wohl die deutsche Normalfamilie sein mag. Naheliegend ist es, die eigene Klasse als Stichprobe zu betrachten und eine Statistik dazu aufzustellen. Erst im weiteren Verlauf der Diskussion kommen die Kinder zur fundamentalen Erkenntnis, daß diese Stichprobe gar nicht repräsentativ sein kann, da kinderlose Familien ja gar nicht vorkommen in der Klasse.

---

104) nach einem Vortrag von H. Freudenthal

4. Ausgewählte Probleme und Fragestellungen zur Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.1 Stochastische Problemsituationen ganzheitlicher Natur.

Zwar habe ich mich bemüht, auf den letzten Seiten Unterrichtsaktivitäten für den Grundschulunterricht in der Literatur zu finden bzw. selbst zu entwickeln, in denen unsere fundamentalen Ideen möglichst in Reinkultur elementarisiert werden, aber dennoch unverfälscht den mathematischen Sachverhalt wiederspiegeln. Dennoch war es nicht immer zu vermeiden, daß gleichzeitig mehrere fundamentale Ideen bei bestimmten Aktivitäten beteiligt waren.[105] Beispielsweise gehören nun einmal das Prinzip der großen Zahl, Zufallsvariable und Simulation eng zusammen. Tatsächlich sind viele stochastische Aktivitäten ganzheitlicher Natur und involvieren oft eine Reihe fundamentaler Ideen, so wie die folgende:

Wir haben einen Spielplan[106] vor uns liegen sowie genügend Legosteine, Rechenrollen oder Steckwürfel. Die Pfeile nach links sind rot, die Pfeile nach rechts weiß . Mit einem Würfel, einer Münze, Zufallszahlen, einem Spinner etc. rückt jeder Spieler bei jedem Spielzug nach links bzw. nach rechts oben weiter. Gleichzeitig legt er einen sogenannten "Erinnerungsturm"[107] aus weißen und roten Legosteinen an. Der fertige Turm wird am Zielort aufgestellt. Bevor er aufgestellt wird, soll der Spieler an Hand dieses Turmes noch einmal den eingeschlagenen Weg rekonstruieren. Hier können sich wiederum kombinatorische

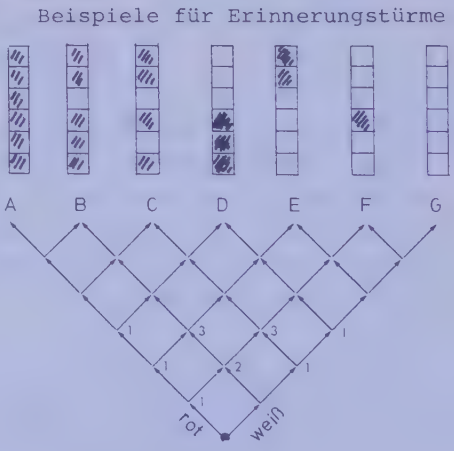


Fig. 82

105) Für den Unterricht ist dies ja durchaus erwünscht (vgl. WITTMANN 1974a S. 119)

106) nach WINTER/ZIEGLER 1972 S. 128

107) vw. ENGEL/VARGA/WALSER 1974 S. 24

Überlegungen anschließen: Welche Türme gehören zu B, zu C, zu D? Wieviel verschiedene Wege führen zu den einzelnen Zielen? Die Symmetrie spielt hier eine entscheidende Rolle, wenn wir die gleichen Fragestellungen für die Ziele E, F, G untersuchen. Eine Reihe weiterer Aktivitäten bietet sich an, die teilweise isomorph zu schon behandelten sind: Wie oft brauche ich "rot" und wie oft "schwarz", um bei B anzukommen? Was ändert sich beim Weg und beim Ziel, wenn ich im Erinnerungsturm einen "roten" und "schwarzen" Stein vertausche? Was ändert sich, wenn ich einen roten gegen einen schwarzen austausche? Wir schreiben zu jedem Punkt die Anzahl der Wege, die zu ihm hinführen, wie teilweise in der Zeichnung schon geschehen. Gibt es Gesetzmäßigkeiten? (PASCALsches Dreieck!)

Wie immer betrachten wir es erst nach solchen Vorüberlegungen als gerechtfertigt, Wahrscheinlichkeitsprobleme im engeren Sinne zu behandeln. In diesem Falle stellen wir zunächst fest, daß das Ziel "meistens" in der Mitte bei C, D, E ist. Wir zeichnen wieder die Verteilungskurve und fragen uns, warum sie im wesentlichen symmetrisch ist, warum sie ihr Maximum in der Mitte hat, warum etwa D wahrscheinlicher als A ist usw. Was geschieht mit der zu erwartenden Verteilung, wenn wir einen Würfel nehmen, der auf fünf Seiten rot und auf einer Seite schwarz ist? Was, wenn wir eine Urne mit 2 roten und der Reihe nach 3, 4, 5... schwarzen Kugeln als Zufallsgenerator nehmen? Was ist zu erwarten, wenn wir das Spielfeld weiter nach oben fortsetzen? etc.

Es ist bemerkenswert, wie eng in solchen Aktivitätskomplexen[108] Symmetrieüberlegungen, die Idee der Gleichverteilung (der einzelnen Wege), Zufallsvariable und Erwartungswerte, kombinatorische Überlegungen, Wahrscheinlichkeitsbewertungen, Simulationen und das Gesetz der Großen Zahl zusammenspielen. Aus diesem Grund verwundert es auch nicht, daß obiges Beispiel unter verschiedenen Verkleidungen, z. B. als "Geisterstadtspiel"[109] in der Literatur

---

108) auch "Problemkontexte" genannt

109) vgl. Spielanleitung zum MATHEMATISCHEN LABOR S. 5

auftaucht. Es scheint optimal, solche Verkleidungen von Zeit zu Zeit im Unterricht aufzunehmen, dann aber jeweils andere Aspekte dominieren zu lassen und die bisher vorwiegend behandelten Aspekte relativ kurz zu wiederholen. (Prinzip der integrierenden Wiederholung!) Das Prinzip der Variation der Veranschaulichung legt nahe, auch den Wegebaum, der ja bei diesen erwähnten Verkleidungen konstant bleibt, zu variieren. Eine Anregung dafür kann FISCHBEINs Versuchstechnik[110] bilden, die sich in hervorragender Weise in unterrichtliche Möglichkeiten transformieren läßt. Es ging dabei um hölzerne Fallrinnen (vgl. S.144), auf denen Kugeln rollen konnten.

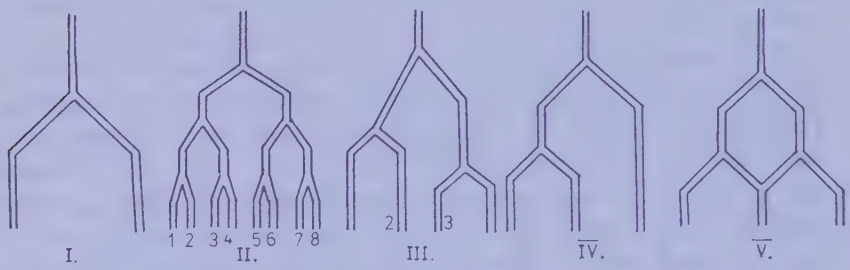


Fig. 83

Wir können auch hierbei ähnliche Aktivitäten durchführen wie beim letzten Beispiel. Das tatsächliche Rollen der Kugeln wird dabei am besten mit Hilfe eines Spinners oder eines Würfels etc. simuliert, den wir an jeder Verzweigung "befragen".

In der Orientierungsstufe erhalten wir durch Auszählen einerseits und Anwendung der LAPLACEschen Regel und des Theorems von den Pfadwahrscheinlichkeiten sowohl die empirischen als auch die theoretischen Verteilungen.

---

110) vgl. FISCHBEIN u. a. 1967 S. 195ff

In den Anfangsklassen haben wir wieder die Möglichkeit (vgl.S.277) Glasröhrchen aufzustellen (Fig. 84), die uns das statistische Auszählen erleichtern und uns auf Grund des Inhalts Verteilungskurven auf enaktiver Ebene liefern. Dieses Vorgehen hat den zusätzlichen Vorteil, daß es uns ermöglicht, Zufallsexperimente zu variieren und die neuen Verteilungen in folgender Weise zu erzeugen: Bei III erhalten wir beispielsweise eine Gleichverteilung. Verbinden wir die beiden mittleren Wege (2) und (3) zu einem einzigen, so brauchen wir, um auf die neue Verteilung zu kommen, nur die beiden mittleren Glasröhrchen zusammenzuschütten. Falls unser Zufallsgenerator eine Münze war und wir 'links' mit 'Zahl', 'rechts' mit 'Wappen' identifiziert haben, ist diese letzte Aktivität ein fundamentales Erklärungsmodell dafür, daß das "gemischte Ereignis beim doppelten Münzenwurf die größte Wahrscheinlichkeit hat.

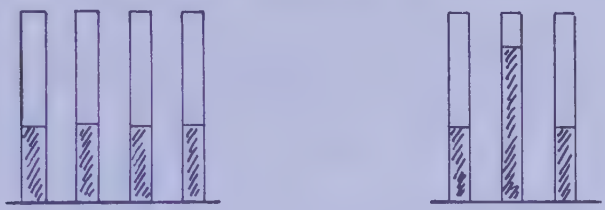


Fig. 84

Weitere Möglichkeiten innerhalb des Problemkontextes können sein: (zu S. 288)

Erkennen von Isomorphien; (1, 2 sowie 7, 8 sowie 3, 4, 5, 6 in II. werden zusammengelegt. Wozu "paßt" das neue Experiment?)

Umkehraufgaben (wir geben eine Verteilung vor. Wie müssen die Röhrchen gelegt werden?)

Standpunktverlagerung (durch Wahl neuer Zufallsgeneratoren. Wir nehmen etwa einen Blancowürfel und fragen uns, wie wir ihn mit "L" und "R" beschriften müssen, um bei 4 die Unsymmetrie zu kompensieren und auf eine Gleichverteilung zu kommen.[111]

111) Dies ist keine Aufgabe für die Grundschule

4.2.Die Bedeutung von Spielen im frühen Stochastikunterricht

Allgemeine Gesichtspunkte

Sowohl die Tatsache, daß die Hauptschwierigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei den Anwendungen liegen, als auch die aus der PIAGET- BRUNERschen Psychologie entwickelten didaktischen Prinzipien haben sich entscheidend in der Forderung niedergeschlagen, daß im Grundschulunterricht die praktische und eigenständige Tätigkeit des Schülers im Zentrum des Unterrichts stehen soll.[112] Unter diesen Tätigkeiten sticht als besonders adäquate Form die des Spiels hervor. Auch wenn es beunruhigend erscheint, wieviele mathematische Spiele in fachdidaktischen Publikationen laufend vorgestellt werden - man kann mit KARASCHEWSKI schon fast von einer "inflationistischen Tendenz" sprechen - so steht doch fest, daß viele Spiele sich im Mathematikunterricht der Grundschule bewährt haben und kaum mehr wegzudenken sind. Es erhebt sich die Frage, welcher Stellenwert dem Spiel im allgemeinen und speziell im frühen Stochastikunterricht zugebilligt werden kann.

Dabei ist allerdings vorauszuschicken, daß hier nicht der Versuch einer "Theorie des Spiels" gemacht werden soll. Selbst durch die Ansätze von genialen Fachwissenschaftlern aus allen möglichen Disziplinen wie DARWIN, FREUD, PIAGET, LORENZ u. a., die alle schon versuchten, das Phänomen Spiel theoretisch zu begründen, ist nach HECKHAUSEN (1964 S. 155) noch sehr viel an Fragen offen und vor allem "... die Motivationspsychologie des Spielens keineswegs enträtselt." Deswegen soll im folgenden Abschnitt die Rolle des Spiels für die Fachdidaktik und insbesondere für den frühen Stochastikunterricht mehr auf Grund von praktischen Erfahrungen und Ergebnissen beleuchtet werden und weniger von einem theoretischen Ansatz her. WINTER[113] sieht u. a. im Spiel "... zwei polare Momente: die Offenheit (der Spielraum) und

112) vgl. WINTER/ZIEGLER 1973b S. 157

113) WINTER/ZIEGLER 1970c S. 6

die Regelhaftigkeit..." verwirklicht und meint an anderer Stelle, daß der Wahrscheinlichkeitsunterricht von guten Spielen geradezu "lebt". Tatsächlich sind diese beiden Pole ein Klassifizierungsmerkmal, bzgl. des Stochastikunterrichts sogar ein Gütemerkmal, an dem man ein Spiel zu messen hat. Ist der Spielraum zu klein (zu viele einschränkende Regeln) gibt es wenig motivationalen Anreiz für das Kind. Ist der Spielraum zu groß und damit zu wenig Regelhaftigkeit gegeben, dürfte an kognitiven Lernprozessen im Laufe des Spielens nicht sehr viel zu erwarten sein.

Auf ein weiteres wichtiges Moment beim Spielen weist KELLER (1973, S. 271) hin. Auf Grund der Tatsache, daß beim Spielen konkrete Handlungen (Setzen von Spielsteinen, Würfeln ....) Ikonisationen auf dem Spielfeld und symbolische Denkakte (Ausdenken von Spielstrategien...) eng zusammen wirken, meint er:

> "Die Bedeutung der hier vorliegenden Spiele liegt unter kognitivem Aspekt auch darin, daß sie die Möglichkeit zu allen drei Arten der Umweltverarbeitung geben und damit im Wechselspiel konkreter und abstrakter Denkweisen grundlegende kognitive Fähigkeiten und symbolische Prozesse üben. Die drei wichtigsten Arten der Repräsentation von Umwelterfahrungen... spiegeln sich in den Spielen wieder..."

Fachdidaktisch gesehen ergibt sich aus dieser Aussage die Forderung, Spiele so zu planen, daß sie sehr viel Möglichkeiten (bzw. auf höherer Stufe auch Ansprüche an den Schüler) des intermodalen Transfers bieten. Ebenso sollten, wenn es um das Thema Transfer geht, Spiele Anreiz für weitere Überlegungen geben.[114]

DIENES (1969 S. 44) meint, daß das Spiel Schüler in aktive kognitive Auseinandersetzung mit mathematischen Sachverhalten bringen kann[115], ja sie sogar in ihrer intelektuellen Leistungsfähigkeit motiviert und herausfordert.[116] Dafür spricht die Tatsache, daß oft ein und dasselbe Spiel von Erwachsenen wie von Kindern unverständlich lange gespielt wird, was STEINBUCH zu der Aussage verleitet hat:[117]

---

114) vgl. KELLER 1973 S. 262

115) vgl. DYNAMISCHES Prinzip von DIENES 1969 S. 44

116) vgl. WITTMANN 1974 S. 60

117) zitiert nach WOITSCHACH 1971 S. 108

> "Die Bereitschaft des Menschen, sich belehren zu lassen, ist gering. Dagegen ist sein Spieltrieb unbändig."

Für KELLER (1973 S. 270) ist dieses Phänomen sogar ein Beleg für die (- intellektuelle Leistungsfähigkeit motivierende -) Kraft des Spiels:

> "Es ist manchmal rätselhaft, warum manche Spiele so lange gespielt werden. Tatsächlich dürfte es so sein, daß sie auf einem zunehmend höheren Niveau gespielt werden."

Ob dem zuzustimmen ist, sei dahingestellt. Jedenfalls ist es verführerisch, gerade für den Stochastikunterricht, die motivationale Urkraft des Spiels auszunützen, denn Experimente, die die Stabilisierung von relativen Häufigkeiten zeigen sollen, sind, wie schon erwähnt, sehr langwierig und manchmal ermüdend für die Kinder. Eingekleidet in ein Spiel halten sie dagegen die Aufmerksamkeit der Kinder bedeutend länger wach.

Auf weitere Gesichtspunkte wie Möglichkeiten des Gruppenunterrichts und der inneren Differenzierung durch gezielte Spielangebote soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, da dies kein spzielles Charakteristikum des Stochastikunterrichts ist. Dagegen erscheint für unser Thema die Unterscheidung zwischen reinem Glücksspiel und strategischem Spiel nützlich:

4.2.2.Glücksspiele und strategische Spiele

Das "Torspiel"[118] oder das Roulettespiel in Spielcasinos sind reine Glücksspiele, bei welchen die Gewinnchancen durch keine Strategie vergrößert werden können. Dennoch wäre es verfehlt, solchen Spielen jeglichen Bildungswert abzusprechen.

Zum einen kann an reinen Glücksspielen durchaus das Prinzip der großen Zahl erfahren werden. Es ist in diesem Zusammenhang erkenntnistheoretisch höchst bemerkenswert, daß R. V. MISES seine Wahrscheinlichkeitsdefinition als "Grenzwert relativer Häufigkeiten" u. a. darauf stützte, daß Spielcasinos "funktionieren", d. h. in der Vergangenheit sich immer eine im Prinzip der großen

---

118) vgl. Seite 275

Zahl ausdrückbare, für numerische Kalkulationen verwendbare, Regelhaftigkeit eingestellt hat.

Zum anderen ist es ein erstrebenswertes Lernziel, Isomorphien von Spielen zu erkennen. Beispielsweise gibt es zum Torspiel mehrere dazu strukturgleiche Variationen.[119]

Im Gegensatz zu den reinen Glücksspielen stehen die strategischen Spiele, bei denen nach HELMA (1964/65 S. 118) "... eine Anzahl von Personen betrachtet wird, die sich 'rational' verhalten in dem Sinne, daß sie ihre Chancen objektiv abzuschätzen und wahrzunehmen vermögen." Es gehört also notwendigerweise dazu, daß Gewinnchancen trotz der Zufälligkeit des Spielverlaufes mit Hilfe von Überlegungen gesteigert werden können.

Die Grenzen zwischen den beiden Spielkategorien sind eher fließend. Wie WOITSCHACH (1971) gezeigt hat, kann man bei Lottospielen, das als reines Glücksspiel gilt, durchaus gewinnsteigernde Strategien (nur hohe Zahlen ankreuzen!) verwenden, solange die Mitmenschen vorwiegend Geburtsdaten auf den Lottoscheinen ankreuzen und eine "gutgemischte Auswahl" bevorzugen. Auch das Roulette kann im Unterricht Züge eines Strategiespiels annehmen, etwa wenn es um die Frage geht, welcher Gewinn auf "pair" ausgeschüttet werden soll. Das Torspiel wird durch geringfügige Variation zu einem allerdings sehr anspruchsvollen Strategiespiel, indem man z. B. mit einem Würfel spielt, der nur einen schwarzen Punkt auf nur einem Feld trägt und auf den anderen Flächen leer ist. Jeder Spieler gibt einen Tip ab. Rät er richtig, darf er bei einem Punkt um 4 (oder 5, 6, etc.) Felder vorwärtsrücken, bei einer blanken Seite nur um 1 Feld. Die Spieler sind gezwungen, ihre Chancen bei beiden Raestrategien abzuwägen. Wer durch falsche Überlegungen die falsche Strategie einschlägt, wird automatisch auf die Dauer dafür bestraft.

Im Grunde genommen kommen Wahrscheinlichkeitsstrategien schon implizit beim sogenannten Plättchenraten vor. Es ist günstiger, das gesuchte Plättchen durch Fragen wie "Ist es ein dünnes Plättchen?" als durch "Ist es ein dickes-rundes?" einzukreisen un es ist bei solchen Gelegenheiten nur ein kleiner Schritt dazu, die

---

119) vgl. Spielanleitung zum MATHEMATISCHEN LABOR 1972 S. 11

Ratestrategien an Hand eines Baumdiagramms zu ikonisieren und zu diskutieren. Wohl das bekannteste strategische Spiel zur Wahrscheinlichkeit stammt von VARGA. Es ist hierbei ein Spielplan vorgegeben, sowie verschiedene Zufallsgeräte wie Würfel, Spinner etc. und Regelkarten.

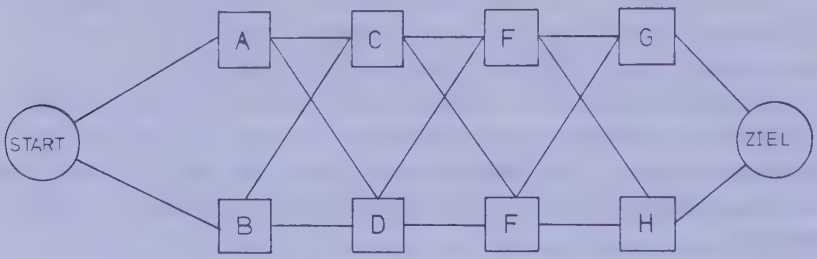


Fig. 85

Die Felder A - H sind mit Spielkarten belegbar, die zum Schutz gegen Verrutschen in Schlitze gesteckt werden. Beispiel für die Spielkarten gibt es in großer Anzahl im MATHEMATISCHEN LABOR, wie etwa folgende: (dabei gibt immer das obere Feld den Zufallsgenerator an, das untere die Gewinnregel)

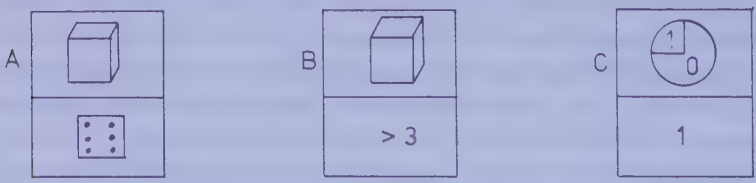


Fig. 86

Das Spiel läuft so, daß jedes Kind seinen Spielstein auf A oder B setzt. Sobald es das dort angezeigte Ereignis "würfelt", darf es - wieder nach Wahl - auf ein Feld in Pfeilrichtung weiterrücken.

Der Vorteil des Spiels besteht in seinem durch die Auswahl der Karten vielfältigen Variationsreichtum. Im Grunde können alle bisher aufgezeigten Aktivitäten in dieses Spiel eingebracht werden. Vor allem für Wahrscheinlichkeitsvergleiche bietet es einen zwanglosen Zugang. U. a. bietet sich die Möglichkeit, durch Wahl der Kartenreihenfolge das Spielsystem so zu gestalten, daß sich die Wahrscheinlichkeiten für zwei Alternativereignisse zu-

nächst deutlich unterscheiden und erst im weiteren Verlauf weniger. Es zeigt sich, daß die Schüler, sofern sie die Regeln auf den Karten verstehen, sehr schnell zwischen "leichten" und "schweren Karten" unterscheiden lernen. Es fallen Äußerungen wie "Eine gerade Zahl; das geht ganz leicht" oder (zum Mitspieler): "Das ist feige. Du nimmst immer den leichten Weg." Damit ist das Spiel eine klassische Ausgangssituation für den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff. Durch die Vorgabe der Karten, die in einer Spielvariation auch selber gesteckt werden dürfen, werden die Schüler ständig gezwungen, sich zu fragen: Was erwarte ich von dieser oder jener Karte?" Die zunächst intuitive wahrscheinlichkeitsmäßige Bewertung der Spielkarten, die im Grunde enaktive Modelle für den mathematischen Begriff "Ereignis" darstellen, dient den Kindern zunächst als Grundlage ihres Handelns. Ihre Erwartungen werden teilweise erfüllt, teilweise auch nicht. Sie erleben so, ob ihre an die Situation angelegten intuitiven Wahrscheinlichkeitsmodelle adäquat sind. Durch Symmetrieüberlegungen und Betrachtungen der relativen Häufigkeiten werden diese Modelle im Laufe der Zeit modifiziert und objektiviert.

Alle diese Ausführungen lassen es als denkbar erscheinen, das VARGAspiel nicht nur als Möglichkeit, in den Stoff einzusteigen oder als Motivationshilfe, zu betrachten, sondern geradezu als das Zentrum, als den durchgehenden Strang im Stochastikunterricht, von dem aus durch die vom Lehrer gegebenen Impulse alle möglichen Nebenwege beschritten werden können. Beispielsweise lassen sich innerhalb des Spieles Urnenvergleiche durchführen. Das folgende Beispiel ist von WINTER:[120]

> "Wir brauchen jetzt 8 verschiedene Urnen und rote und weiße Kugeln (oder Stecker oder Zettel...) Setze einen Stein auf "Start" und wirf eine Münze. Zeigt sie 'Zahl', darfst du auf A oder B nach freier Wahl.
> Man darf weiter auf eines der nächsten Felder, wenn man rot zieht, bei weiß muß man stehenbleiben. Es wird immer jeweils eine Kugel gezogen.

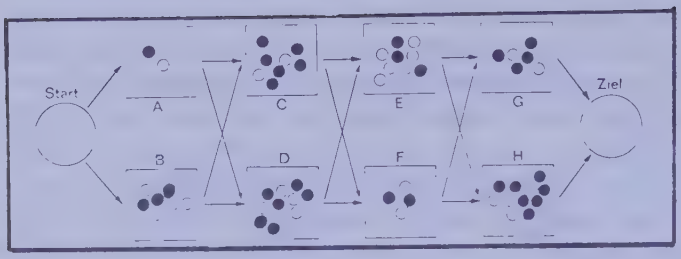
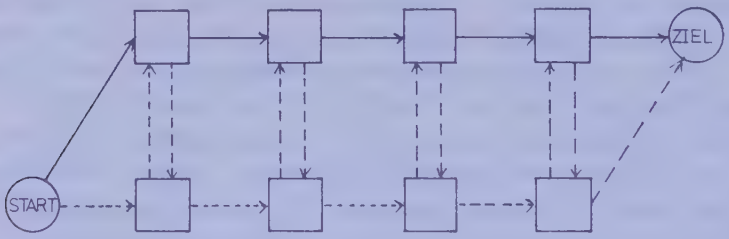


Fig. 87

a) Wieso ist es günstiger, A zu wählen und nicht B?
(In A ist die Hälfte rot, in B?)
b) Stelle Fragen wie in Aufgabe 1."

Ebenfalls von WINTER stammt die folgende Variation: (gestrichelt soll 'rot' bedeuten, durchgezogen 'schwarz'):[121]

"a) Male dieses Spielfeld ab. Fig. 88



Setze einen Spielstein auf Start. Jetzt würfele mit einem Würfel und setze den Stein weiter nach diesen Regeln..."

Die Spieler würfeln mit einem Würfel. Bei 1, 2 darf man einen roten Pfeil gehen, bei den übrigen Zahlen einen schwarzen. Mögliche Aktivitäten, vor allem wieder kombinatorische, liegen auf der Hand.

Im folgenden Spiel von WINTER (1971c S. 11f) spielt der zu erwartende Gewinn (d. h. der Begriff der Zufallsvariablen und des Erwartungswertes) eine zentrale Rolle:

120) WINTER/ZIEGLER 1973a S. 140
121) WINTER/ZIEGLER 1972 S. 127

Jeder Spieler bekommt ein Kapitel in Form von Streichhölzern oder Chips. Es wird aus einer Urne gezogen z. B. mit den Zahlkugeln von 1 - 6 als Inhalt. Jede Ziehung kostet 1 Punkt. Der Bankhalter bietet an: wenn die Zahlkugel "=3" gezogen wird, bekommt jeder, der mitgespielt hat, 4 Punkte. Wer ist bereit mitzumachen?

Die Kinder können sich entscheiden, ob sie auf das Angebot eingehen. Tun sie es, merken sie sehr schnell, daß sie auf einen ungünstigen Vertrag eingegangen sind und machen neue Vorschläge etwa: wenn die Gewinnzahl fällt, muß der Bankhalter DM 6,-- auszahlen. WINTER:

> "Indem die Schüler einen gerechten Vertrag finden, haben sie die Wahrscheinlichkeit des in Frage kommenden Ereignisses richtig bestimmt, und das ist der Sinn eines solchen Spiels."

Von besonderem Reiz ist das folgende, auf das BERTRANDsche Kästchenproblem zurückgehende Spiel, vor allem deswegen, weil erst eine Strategie gefunden werden muß. GÖHNER/WEBER (1971 S. 48) berichten:

> "In einem Becher liegen drei Scheiben. Die Schüler wissen, daß die erste auf beiden Seiten gelb, die zweite auf beiden Seiten blau und die dritte auf der einen Seite gelb und auf der anderen blau ist. Nun zeigt man eine Scheibe von einer Seite und die Schüler versuchen, die Farbe der Rückseite zu erraten.... Es wird eine Tabelle angelegt und nach jeweils 20 Vermutungen zählt jeder Spieler die Anzahl der richtigen Vermutungen und berichtet über seine "Ratestrategie". Beispiele für die Strategien:
> 1) einfach raten
> 2) stets die andere Farbe sagen als die gezeigte
> 3) stets die gleiche sagen
> 4) stets nur eine Farbe sagen, z. B. gelb"

Die Tatsache, daß der Spieler mit der 3. Strategie meist gewinnt, dient als Motivation für weitere Überlegungen.

Alle diese beschriebenen Spielaktivitäten sind nur eine kleine Auswahl aus dem schon vorliegenden Material. Es spricht eigentlich alles dafür, die Spiele tatsächlich im Unterricht fest - auch von den Richtlinien her - zu installieren. Allerdings scheinen mir dafür weitere empirische - wenn auch nicht gleich "Untersuchungen" - so doch Berichte nötig, die z. B. in phänomenolo-

gischer Art Erfahrungen zusammenzutragen helfen. Es ist erschreckend, wie wenig über Erfahrungen zu der Flut an vorhandenen Spielen in der fachdidaktischen Literatur berichtet wird. Gerade "durchschnittliche Lehrer" im BRUNERschen Sinne, sollten auch Gelegenheit haben, sich bei der Planung von Spielen im Unterricht auf das Verhalten der Kinder geistig einzustellen.

4.3. Stochastische Situationen im Kontext anderer mathematischer Stoffe.

Zum Abschluß soll noch ein weiterer sehr wichtiger Gesichtspunkt skizziert werden, der schon an mehreren Stellen angeschnitten worden ist: die Verzahnung der Stochastik mit den sonstigen mathematischen Stoffen im Primarbereich. Hauptargumente für unsere These, daß Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht als isoliertes Stoffgebiet zwischen einem Stoff A und einem Stoff B betrieben werden darf, sind die folgenden:

(1) Durch Integration verschiedener Stoffe kann Zeit gespart werden. Neue mathematische Stoffe wie die Stochastik im Primarbereich erfordern notwendigerweise Streichungen anderer Stoffinhalte, die durch Integration gemildert werden können. (Ökonomie!)

(2) Stochastikunterricht soll dem Weltverständnis dienen. Konkrete stochastische Situationen treten jedoch in der Realität meist nicht isoliert auf, sondern haben sehr oft etwa geometrische Bezüge. (Integration in der Realität!)

(3) Ein Stoff wird umso einsichtiger und prägt sich umso besser ein, je mehr Struktur und Querverbindungen enthalten sind,[122] sowohl innere als auch solche zwischen Mathematik und Realität. (Beziehungshaltigkeit!).[123]

(4) Mit (3) hängt auch zusammen, daß Schemata umso besser transferierbar auf neue Situationen sind, je vielfältiger und aspektreicher das Feld an Problemen und Situationen war,

---

122) vgl. BRUNER 1970 S. 36

123) vgl. FREUDENTHAL 1973/74 S. 75ff

an denen diese Schemata gewonnen wurden. Hiermit korrespondieren die fachdidaktischen "Prinzipien der Stabilisierung", "der integrierenden Wiederholung" und das "Redundanzprinzip".

(5) Bei allen fachdidaktischen Innovationen ist höchste Vorsicht geboten, da sie sich oft auf dem Rücken unserer Kinder abspielen. Der Stochastikunterricht ist im Augenblick noch ein weites Feld ungeklärter Probleme. Die Fachdidaktik hat hierzu noch nicht einmal eine feste theoretische Basis entwickeln können, geschweige denn gezielte Untersuchungen vorlegen können. Sie ist im Augenblick eher noch dabei, Hypothesen zusammenzutragen und Material zu sammeln, mit dem Ziel, hieraus ein kohärentes System didaktischer Prinzipien und methodischer Leitlinien zu entwickeln. In diesem Status scheint es solider, stochastische Aktivitäten im Unterricht dann durchzuführen, wenn sie sich von der Behandlung des Standardstoffes gerade anbieten, anstatt schon jetzt eigenständige stochastische Aktivitäten in das Pflichtpensum aufzunehmen.

Alle diese Argumente sprechen dafür, Stochastik nicht für sich, sondern im Kontext anderer mathematischer Gebiete zu treiben. Dieser Kontext läßt sich graphisch etwa wie in Abb. [89] darstellen:

Die Integration von stochastischen oder kombinatorischen Problemen mit Logik, Mengenlehre Arithmetik im Bereich der natürlichen Zahlen ist bei den Beispielen immer wieder vorgekommen. Ich will deswegen im folgenden noch die restlichen Bezüge streifen.

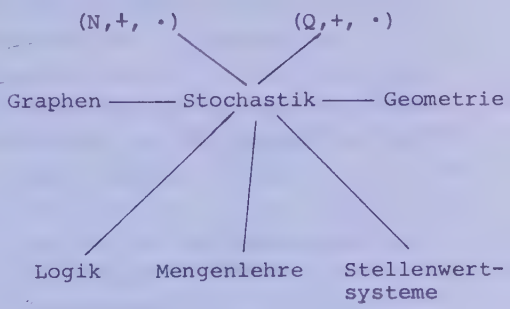


Fig. 89

124) vgl. WITTMANN 1974 S. 61

125) Erweiterung eines von WINTER stammenden Schemas

4.3.2. Stochastik und Bruchrechnung

Die Beziehung zwischen Stochastik und Bruchrechnen ist vom fachdidaktischen Standpunkt unter zwei Aspekten zu sehen: nämlich einmal der Verwendung stochastischer Situationen, um zur Bruchrechnung hinzuführen, und zum anderen der Anwendung schon erworbener Bruchrechenoperationen in stochastischen Situationen. Es besteht eine Tendenz in der modernen Fachdidaktik, die beiden Bezüge nicht als curriculare Alternativen aufzufassen, sondern vielmehr in der Grundschule den ersten Aspekt dominieren zu lassen, der dann allmählich in der Orientierungsstufe dem zweiten Aspekt Platz macht. Eine Trennung dieser beiden Sichtweisen ist nur aus gliederungstechnischen Gründen für unser weiteres Vorgehen sinnvoll.

4.3.2.1. Anwendung der Bruchrechenoperationen in der Stochastik

Um sinnvolle Anwendungsaufgaben zur Multiplikation von Brüchen in den "Standardstoffen"[126] zu finden, muß man recht lange suchen. Man findet sie etwa bei Flächenberechnungen und seit neuerer Zeit bei der Verkettung von Operatoren bzw. "Maschinen". Als echte Anwendungsaufgaben erscheinen sie jedoch nicht zwingend.[127] Etwas anderes ist es, wenn man auch Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugrundelegt, die nach ATHEN (o. J. S. 2) "die wichtigste praktische Anwendung der Bruchrechnung darstellen dürfte". Diesem Standpunkt ist sicher zuzustimmen, wenn man bedenkt, daß die Addition und Multiplikation von Brüchen in Gestalt der Additions- und Multiplikationsregel zentral in der Stochastik verankert sind.

---

126) "Standardstoffe" hier verstanden in Abgrenzung zur Stochastik inkl. deskriptiver Statistik

127) Vom Aspekt des Ausmessens mit einem Maßstab bei geometrischen Situationen ist eher der Gebrauch von Dezimalen näherliegend. Verkettungsaufgaben sind ebenfalls keine echten Anwendungen, sondern beruhen schon eher auf künstlichen Modellierungen.

128) vgl. HÖFLER 1910, KÜTTING 1962

Es erhebt sich allerdings auf Grund modernerer Lehrbuchdarstellungen wie etwa von ENGEL (1973) die berechtigte Frage, ob der Multiplikationsregel wirklich diese, von älteren Autoren[128] immer wieder betonte zentrale Rolle zukommt und ob nicht statt dessen die Regel von der Pfadwahrscheinlichkeit[129] neben der Additionsregel von Anfang an stärker betont werden sollte.

Die Argumente für diese Hypothese lassen sich nicht auf den mathematisch-ökonomischen Gesichtspunkt reduzieren, daß die Regel von den Pfadwahrscheinlichkeiten die allgemeine, die Produktregel die speziellere sei. Vielmehr spricht vieles dafür, daß die Produktregel die begrifflich schwierigere Regel darstellt, da sie für den verständnisvollen Gebrauch einen im Individuum fest verankerten Unabhängigkeitsbegriff voraussetzt. Es ist leichter und näherliegend, etwa wie in nebenstehender Aufgabe[130] eine Abhängigkeit zu erkennen und sie umzusetzen in ein mathematisches Schema als alle denkbaren Abhängigkeiten auszuscheiden und die Unabhängigkeitshypothese zugrundezulegen.

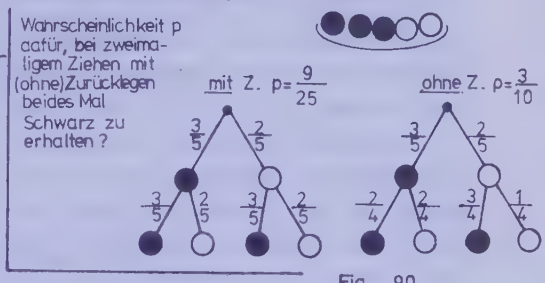


Fig. 90

Wir haben somit hier den besonderen Fall vorliegen, der sich auch in der DIENERschen deep-end-These ausdrückt, daß der spezielle Fall der schwerere ist.

Es sei nur am Rande noch erwähnt, daß Additionsregel und die Regel über die Pfadwahrscheinlichkeit in Form der Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit zu einem höheren "Schema" in ganz natürlicher Weise integriert werden können, was obige Argumentation zusätzlich stützt.

---

129) vgl. ENGEL 1973 S. 16

130) ibid.

131) vgl. hierzu den Abschnitt über Unabhängigkeit S.242 ff, in dem wir nach der These vorgegangen sind, daß man Unabhängigkeit erst versteht, wenn man Abhängigkeit erfahren hat.

4.322 Frühe Bruchrecheninszenierung durch stochastische Situationen

Während der erste Aspekt - Stochastik als Anwendungsfeld für die Bruchrechnung, der erst ab der Orientierungsstufe dominieren dürfte, in fachdidaktischen Publikationen breit dargestellt wird [132], ist der zweite Aspekt, bei dem man mit Hilfe stochastischer Problemstellungen und Modelle eine frühe Bruchrecheninszenierung intendiert, erst in den letzten Jahren, sieht man einmal von PAGE (1959) ab, ins Blickfeld der Diskussion geraten. In Frage kommt hier das Arbeiten mit der PIAGETschen "grouping technique", mit operativen Urnenerzeugungsmechanismen [133], die konsequente Verwendung der VARGAschen Sprechweise: "3 von 5 Möglichkeiten sind günstig" als vage Vorform des Bruches 3/5. Reihen wir die Kärtchen des VARGAschen Strategiespieles von Seite 294, die ja im Grunde Brüche repräsentieren, längs der VARGAschen Wahrscheinlichkeitsskala auf, so treiben wir damit schon frühe, intuitive Bruchgrößenvergleiche.

Eine weitere mögliche Aktivität gibt PAGE (1959 S. 245) an, die innerhalb eines umfassenderen Problemkreises zu denken ist: Nach PAGE soll dabei den Schülern klar werden, daß "Ausdrücke wie 'zwei Chancen auf 36' und 'eine Chance auf 18' synonym sind". Dazu nehmen wir uns das vom Würfeln mit zwei Würfeln her noch bekannte Diagramm der möglichen Ergebnisse her. PAGE (S. 246) schreibt über das weitere Vorgehen:

"For students, who do not know fractions, here is a way to give them an interpretation of the essentials of

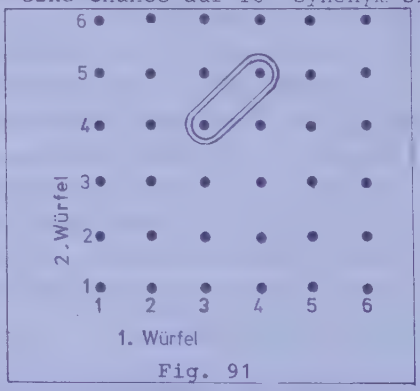


Fig. 91

132) vgl. die einschlägigen Arbeiten von ENGEL und ATHEN, sowie die Beiträge in den Sonderheften zur Stochastik in der Reihe: Der Mathematikunterricht

133) vgl. S. 132, 196, 266, 267

reducing fractions. For the case of 'two chances in 36', encircle the two original dots, and then encircle in pairs all of the other dots. (Fig. 92) (Adjacent pairs of dots are encircled only for convenience.) For students who do not immediately recognize that there are 18 pairs of dots in the preceding figure, this becomes an exercise illustrating the operation of division. In any case students should determine that there are 18 ovals in the figure and that one's chances of landing in one oval are as good as those of landing in any other oval. Thus the chances of landing in the first oval discussed are '1 out of 18'. Similar grouping procecures should be carried out until students can translate rather freely from 10 out of 36 to 5 out of 18..."

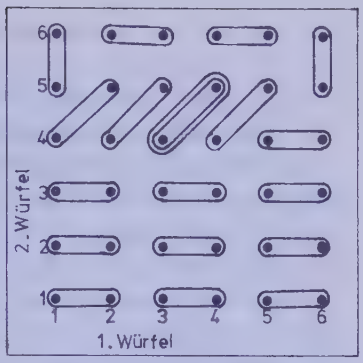


Fig. 92

Leider schreibt PAGE nichts Genaueres über die betreffende Altersstufe. Es liegen mir auch keine Ergebnisse zu dieser Vorgehensweise vor.

4.3.3. Stochastik und Stellenwertsysteme

Bei der Konstruktion von Problemkontexten stochastischer Natur kann auch durchaus angeknüpft werden bei Problemen der Stellenwertsysteme. Ich will mich hierbei kürzer fassen als bei den anderen bisher behandelten Aktivitäten und die Beispiele mehr exemplarisch behandeln.

In den beiden folgenden Beispielen spielt etwa das Dualsystem eine besondere Rolle:

a) Eine Tafel Schokolade soll mit Hilfe einer Münze unter 32 Schülern ausgelost werden . Die Aufgabe wird gelöst, indem man eine 5-stellige Dualzahl auswirft.

b) Zwei Spieler würfeln mit einem Becher, in dem drei Dualwürfel sind, dreistellige Dualzahlen aus. Der eine gewinnt bei der Quersumme Null, der zweite bei der Quersumme 1,

der dritte bei der Quersumme 2, der vierte bei der Quersumme 3.

c. Ein schon zum didaktischen Allgemeingut gewordenes Beispiel ist das Stellenwertzufallsspiel "Hohe Hausnummern werfen". Dabei hat jeder Spieler ein Arbeitsblatt mit drei Kästchen vor sich liegen.

Er wirft mit einem normalen Spielwürfel und muss sich entscheiden, wohin er die gewürfelte Zahl setzt. Bei einer 1 wird er sich natürlich für die letzte Stelle entscheiden, bei einer 6 für die erste Stelle. Schwierig sind vor allem die Zahlen 3 und 4. Es ist interessant, bei diesem Spiel zu beobachten, daß Kinder, die etwa an erster Stelle eine 3 haben, während der Nachbar da eine vier hat, oft noch versuchen, durch die nächsten Würfe den Nachbar doch noch zu überholen. Das plötzliche AHA-Erlebnis, daß es im Grunde auf die erste Ziffer ankommt, stellt sich erst im Laufe des Spieles ein. An diesem Beispiel bestätigt sich in prägnanter Weise die von PAGE aufgestellte These, daß es stochastische Aktivitäten ermöglichen, schon sehr früh "einen neuen und interessanten Kontext für mathematische Standardideen zu schaffen und so die Einsicht des Schülers in diese Ideen zu vertiefen".[134] Denn sicherlich ist die sich im Laufe des Spiels herauskristallisierende Erkenntnis, daß es im wesentlichen auf die erste Stelle ankommt, im Rahmen der Stellenwertsysteme fundamental.[135]

4.3.4. Stochastik und Geometrie

Wohl am prägnantesten zeigt sich die "integrative Kraft" beim Zusammenwirken von stochastischen und geometrischen Ideen, wo-

---

134) PAGE 1959 S. 230 [Übers. d. Verf.] Vgl. WINTERs Aussage über die "integrative Kraft von stochastischen Situationen".

135) Auch bei diesem Spiel liegen die möglichen Variationen wie "niedere Hausnummern werfen", andere Zufallsgeneratoren, auf der Hand und brauchen nicht ausgeführt werden.

bei ich Anfänge der Koordinatengeometrie einbeziehe.

Aus verschiedenen Gründen scheint diese These recht plausibel. Zum einen gehört geometrisches Denken zu den Fähigkeiten, mit denen das Individuum auf jeder Stufe seiner Entwicklung am wenigsten Schwierigkeiten hat. Der Pädagoge braucht kaum mit inadäquaten Intuitionen zu rechnen, eher schon damit, daß Schüler manche Dinge als selbstverständlich betrachten, obwohl dahinter handfeste mathematische Probleme liegen.

Anders ist es beim stochastischen Denken, das, wie wir festgestellt haben, fast allen Menschen große Schwierigkeiten macht. Es liegt nun nahe, das unsichere stochastische Denken durch geometrisches Denken zu stützen, indem man in besonderem Maße solche Problemsituationen schafft, in denen beide Aspekte involviert sind.

Auch noch ein weiterer Grund für die vorrangige Stellung der Geometrie in einem frühen Stochastikunterricht scheint mir entscheidend. Von den drei BRUNERschen Darstellungsmodi ist die ikonische in der Grundschule die dominierende, weil sie einerseits sehr viel ökonomischer ist als die enaktive ("images are great summarizers of action"), zum anderen aber noch nicht so abstrakt ist wie die symbolische. Bei geometrischen Situationen haben wir nun den besonderen Fall, daß wir meist die intermodale Übersetzung von der enaktiven oder symbolischen Darstellung eines Problems oder eines Teils davon zur Ikonisierung gar nicht mehr durchzuführen brauchen und so eine von vielen Schwierigkeiten beim Aufbau mathematischer Schemata gar nicht erst auftritt.

Für die eingangs aufgestellte These spricht auch die Kraft geometrischer Veranschaulichungen bei einigen schon skizzierten Aktivitäten. Beispielsweise sind junge Kinder schneller fähig, Wahrscheinlichkeiten bei verschiedenen Spinnern auf Grund der Größe der Rotflächen zu vergleichen als entsprechende Aufgaben bei Urnen, bei denen ja die Ikonisierung einen zwischen algebraischem Problem und geometrische Veranschaulichung geschalteten Übersetzungsvorgang darstellt.

Auch bei unserem Stichprobenbeispiel von Seite 282 haben wir die Erfahrung gemacht, daß sehr junge Kinder durchaus fähig sind, von der Stichprobe auf die Gesamtpopulation zu schließen, wenn man das Problem einbettet in eine geometrische Gitterdarstellung auf einer Tageslichtfolie.

Wie man einen geometrisch- stochastischen Problemkontext schaffen kann, der eine ganze Reihe fundamentaler Aktivitäten aller Schwierigkeitsgrade beinhalten kann, zeigt NIMAN (1973) am Geobrett auf. Ich folge im wesentlichen seiner Darstellung, die um das Thema 'Wahrscheinlichkeit und Fläche' kreist.

Das Aktivitätenpaket wird eingekleidet in das Problem, daß ein Fallschirmspringer abspringt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, z. B. in dem grauen Gebiet zu landen, wenn man weiß, daß er sicherlich im quadratischen Areal ankommt. (Fig. 93) Die Diskussion führt zum Ergebnis, daß als Wahrscheinlichkeit "Teilfläche dividiert durch Gesamtflächeninhalt" anzusetzen ist, im Fall von Fig. 93 also p = 4/16. Als Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ergibt sich p = 1-p. In zwangloser Weise ergeben sich an Hand der Abbildungen Fig. 94 und Fig. 95 die weiteren Regeln p = p(A) + p(B) bezw. $p(A \vee B)=p(A)+p(B)-p(A \wedge B)$ und die Produktregel p = p(A) · p(B) in Fig. 96 , die Monotonie der Wahrscheinlichkeitsfunktion in Fig. 97 sowie die

Fig. 93

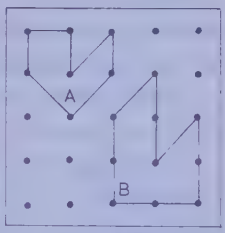


Fig. 94

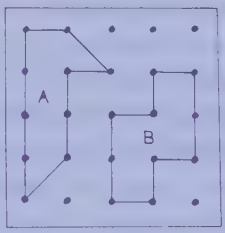


Fig. 95

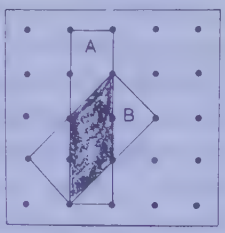


Fig. 95b

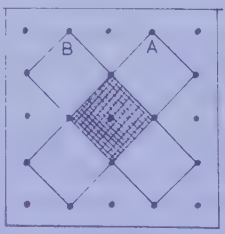


Fig. 96

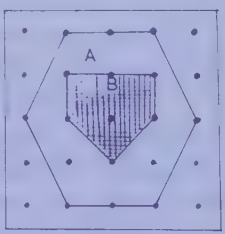


Fig. 97

bedingte Wahrscheinlichkeit $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ in Fig.98 und Fig.99. Als Delikatesse behandelt NIMAN (S. 170) am Geobrett noch das klassische Begegnungsproblem in der Fassung: Zwei Personen vereinbaren, sich zwischen 6 und 7 Uhr im Park zu treffen. Jeder will exakt 15 Min. warten und dann wieder weggehen, wenn bis dahin der Partner noch nicht eingetroffen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich zu treffen?

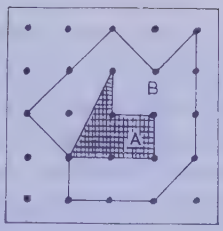


Fig. 98

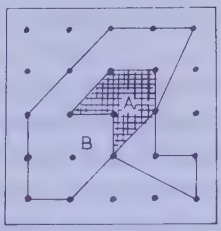


Fig. 99

Durch Darstellung am Geobrett und behutsame Führung der Schüler erhalten wir als Ergebnis, daß in Fig.100 die graue Fläche der Bereich ist, in dem sie sich nicht verfehlen. Auf Grund der Vorarbeiten ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für eine Begegnung zu 7/16 sehr schnell.

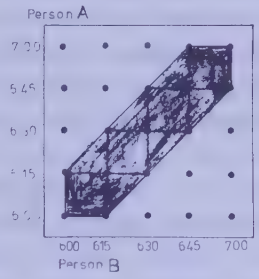


Fig. 100

Wohl eines der schönsten Beispiele für die fundamentale Erklärungskraft der Geometrie in stochastischen Situationen stammt von FREUDENTHAL, der aus einer Grundschulklasse folgendes berichtet:

> "Die Lehrerin hat einen großen Würfel mitgebracht und leitet mit der Frage ein, ob es wohl Zahlen gibt, die seltener als andere gewürfelt werden. Der Großteil der Kinder meint, das sei wohl die Sechs. Auf die Frage der Lehrerin, ob sie oder ein Schüler wohl leichter Sechsen werfen können, kommt die erwartete Antwort, dies könne wohl die Lehrerin besser.
>
> Nun wird das von der Lehrerin mitgebrachte Bastelmaterial verteilt (Pappe, Scheren, Klebstoff und Farbe).

> Die Schüler bekommen den Auftrag, selber einen Würfel zu bauen und dann auszuprobieren. Die Bastelei fällt den Kindern sehr schwer, ab und zu wird ein fast fertiger Würfel durch eine ungeschickte Bewegung demoliert etc. Endlich sind die Kinder fertig; der hinten sitzende Dozent ist schon unruhig wegen der 'verschwendeten Zeit' und die Kinder werden wieder gefragt, welche Zahlen wohl selten vorkämen. Ohne vorheriges Würfeln kommt die mehrheitliche, spontane Antwort: Ist doch egal!"

Was läßt sich aus der Geschichte ersehen? Doch wohl, daß die Kinder, während sie geometrisch tätig waren, einen ganz fundamentalen Lernprozess gemacht haben, so unbemerkt, daß ihn der zuhörende Dozent nicht einmal gemerkt hat. Sie haben die Idee der Symmetrie und der Gleichverteilung begriffen - ohne langwierige Versuchsserien - allein aus Einsicht, die in diesem Fall durch das Arbeiten mit dem geometrischen Material provoziert worden ist.

Noch etwas läßt sich aus der Geschichte lernen, nämlich daß für den Mathematikunterricht sorgfältige Planung zwar nötig ist, daß sich Lernprozesse bei den Kindern jedoch sehr oft auf andere Art einstellen, als man beabsichtigt hat und daß letzten Endes die besten didaktischen Ideen auf zufällige Art gefunden werden, wobei man allerdings dem Zufall nachhelfen kann und Unterrichtsversuche nicht durch zu dogmatische Planung einschränkt.

Resümée:

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit bestand darin, Fakten, Ergebnisse und Befunde aus den die Mathematikdidaktik unmittelbar tangierenden Bezugsdisziplinen: Mathematik, Psychologie, (Curricular)pädagogik, Erkenntnistheorie, Mathematikgeschichte, Geschichte des Stochastikunterrichts etc. zum Rahmenthema "Stochastik in der Schule" (insbesondere im Primarbereich) zu klären, zu ordnen und zusammenzufassen.

Exemplarisch sollten dabei auf einem abgegrenzten Gebiet des Mathematikunterrichts, nämlich dem Stochastikunterricht, Beziehungen zwischen allgemeinen (fach)didaktischen und speziellen didaktischen Überlegungen gestiftet werden. Insbesondere sollte die BRUNERsche Konzeption mit dem vorliegenden Beispielmaterial zum Stochastikunterricht konfrontiert werden - mit dem Ziel, sie durch die kohärente Behandlung eines ganzen Gebietes zu erläutern, zu illustrieren, eventuell sogar zu stützen und dabei vor allem klar zu machen, was die "fundamental ideas" und die Curriculumspirale konkret am Beispiel "Stochastik" eigentlich bedeuten.

Ein wesentlicher Gesichtspunkt dabei war folgender: BRUNERs Ideen sind ja erst seit einigen Jahren voll im Brennpunkt der fachdidaktischen Diskussion. Schon vorher jedoch haben Fachdidaktiker in reichem Maße Material für den Stochastikunterricht geliefert und nach intuitiven Gesichtspunkten strukturiert und geordnet, wobei manche dieser Ansätze sich als weniger effektiv erwiesen, andere wie die von ENGEL, VARGA und WINTER sich durchgesetzt haben. Es erhebt sich nun die interessante Frage, ob die didaktischen Prinzipien dieser Autoren moglicherweise mit denen von BRUNER korrespondieren. In diesem Falle würde die Explizierung der vorher von Fachdidaktikern implizit und intuitiv verwendeten Gesichtspunkte durch BRUNER somit eine Bereicherung des fachdidaktischen Instrumentariums bedeuten. Es wäre dann zu fragen, ob damit in der Mathematikdidaktik über den Stochastikunterricht hinaus sinnvoll und nutzbringend gearbeitet werden könnte.

Wenn oben von einer"Korrespondenz" die Rede ist, so ist damit natürlich nicht die banale Tatsache gemeint, daß sowohl

die mathematische Analyse, als auch das Studium entwicklungspsychologischer Randbedingungen, als auch allgemeinpädagogisch-didaktische Gesichtspunkte innerhalb eines curricularen Rahmens für die Planung mathematischer Curricula unabdingbar sind.

1. Illustrierung des BRUNERschen Rahmens durch das Beispiel "Stochastik".

Hierzu setzen wir zuallererst an den in der Einleitung zitierten BRUNERschen Thesen an und prüfen, ob sie sich für den Stochastikunterricht als relevant herausgestellt haben.

> *(1) Die Konstruktion neuer Curricula erfordert die Mitarbeit der führenden Forscher der Wissensgebiete, die den Unterrichtsfächern zugrunde liegen.*

Diese These ist für den Bereich der Stochastik insofern gestützt worden, als wir entscheidende, wenn nicht die entscheidenden Impulse (Modellbegriff, subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie, Sprachdisziplinierung statt Begriffsexplizierung, keine Betonung der Mengenalgebra, Bedeutung der Zufallsvariablen...) aus dem Studium der Quellen erhalten haben. Im übrigen kann man auf Grund unserer Erörterungen sogar an dieser Stelle verallgemeinern: nicht nur bei der Curriculumskonstruktion, sondern auch bei der Unterrichtsplanung im kleinen, die jeder Lehrer ständig vornehmen muß, sind grundlegende Kenntnisse der mathematischen Quellen unabdingbar, und zwar unabhängig von der betrachteten Altersstufe. Die manchmal vertretene Auffassung, die Mathematikkenntnisse eines Abiturienten würden für den Mathematikunterricht in Vor-und Grundschule ausreichen, ist irrig.

> *(2) Das entscheidende Unterrichtsprinzip... ist die Vermittlung der Struktur, der 'fundamental ideas'...*

Diese These scheint auf den ersten Blick trivial. Was man als wichtig, als zentral, idealtypisch oder als fundamental erachtet, soll in den Unterricht - was unwesentlich, nebensächlich, zu speziell ist, braucht nicht behandelt zu werden. BRUNER meint jedoch in diesem Zusammenhang mehr.

Es hat sich bei unseren Erörterungen gezeigt, daß fundamentale Ideen wirksame Planungsinstrumente, Gliederungshilfen, und Auswahlfilter sein können, um Unterrichtsaktivitäten zu konstruieren, die sich nicht der Art, sondern nur dem Niveau nach von der in einer bestimmten Wissenschaft geforderten Forschungshaltung unterscheiden. (Beispiel: Monte - Carlo - Simulationen)

(3) Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Weise gelehrt werden.

Wenn wir für den Bereich der Stochastik "jeden Lehrgegenstand" auf unsere fundamentalen Ideen beziehen, so ist auch diese These durch unsere Ausführungen zumindest für die Altersstufe ab 7 Jahren bestätigt worden, während sie für die Altersstufe darunter höchst zweifelhaft ist. Es spricht sehr viel dafür, daß das Kind unter 5 Jahren grundsätzlich in allem eine zureichende Seinsursache sucht und deswegen nicht einmal eine rudimentäre Idee des Zufalls besitzt. Dagegen dürfte es wohl möglich sein, schon ab 4 Jahren kombinatorisches Denken, was man ja nach PIAGET als Kern des stochastischen Denkens ansehen kann, zu präfigurieren.

(4) Ein spiraliger Aufbau des Curriculums ist nötig, der eine Wiederholung der Grundbegriffe auf den verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus ermöglicht bis hin zu den abstrakten, formalisierten Operationen der wissenschaftlichen Begriffsbildung.

Die Notwendigkeit eines spiraligen Aufbaus ergibt sich für den Stochastikunterricht aus sachimmanenten Gründen: Wir haben festgestellt, daß wohl in keinem anderen Gebiet die Problematik der "intuitions contrariées" eine so fatale Rolle spielt, wie in der Stochastik und daß wir es uns einfach nicht leisten können, bei der Behandlung stochastischer Phänomene so lange zu warten, bis der Stoff von seiner formalen Struktur her für die Schüler zugänglich wird. Das aber impliziert notwendigerweise einen spiraligen Zugang.

(5) Der Aufstieg des Lernenden von den konkreten zu den formalen Operationen wird ermöglicht und erleichtert durch die antizipierende Funktion des Intuitiven Erfassens von Zusammenhängen...

Im Zusammmenhang mit der Diskussion über die Rolle der mathematischen Intuition haben wir festgestellt, daß sie eine Leithilfe für das analytische Denken ist und daß sie sich frühzeitig nach Mechanismen "sui generis" konstruiert. Es spricht vieles dafür, daß stochastische Intuition sich zu einem umso wirksameren Instrument entwickelt, je früher, je vielfältiger und je aspektreicher das Erfahrungsmaterial für junge Kinder angeboten wird. Beispiele dazu haben wir im IV. Kapitel gesammelt.

(6) Die entscheidenden Motive des Lernens erwachsen nicht aus Leistungsorientierung und Konkurrenzdenken ... sondern aus dem Interesse an den Gegenständen selber...

Mit aus diesem Grunde haben wir vor allem darauf Wert gelegt, den Konzeptionen von ENGEL, VARGA und WINTER insofern zu folgen, als wir solche Aktivitäten ins Zentrum des Unterrichts gestellt haben, die stochastische Situationen des Alltags oder Modellierungen davon darstellen. Die Erfahrungen, die mit solchen Aktivitäten gemacht worden sind, zeigen, daß Kinder, sobald sie erst einmal die Idee des Zufalls erahnen, ein ursprüngliches und eigentümliches Interesse haben, Gesetze des Zufalls zu erfassen. Es ist auch immer wieder dabei festzustellen, daß das Spiel im frühen Stochastikunterricht die Tätigkeit überhaupt ist, um Interesse zu wecken, zu erhalten und Kristallisationskeime zu bilden für weitergehende Fragestellungen. Allerdings ist dabei die im Augenblick noch kaum zu beantwortende Frage aufzuwerfen, ob nicht durch Strategiespiele wieder sehr viel an Konkurrenzdenken in die Grundschulen kommt.

Insgesamt betrachtet werden die obigen sechs BRUNERschen Thesen sowohl illustriert als auch gestützt, einmal durch die mehr nach intuitiven Gesichtspunkten erstellten Unterrichtsvorlagen zur Stochastik von namhaften Fachdidaktikern, zum andern auch durch die hier vorliegenden "Did. Ansätze..."

Wenden wir uns nun der umgekehrten Fragestellung zu, ob der allgemeine BRUNERsche Rahmen etwas für die Fachdidaktik bringen kann.

2. Anreicherung spezieller fachdidaktischer Arbeit durch den allgemeinen BRUNERschen Rahmen.

Sieht man sich die programmatischen Äußerungen ENGELs in seinen Vorschlägen zum frühen Stochastikunterricht an,(vgl. S. 209) so ist die inhaltliche Ähnlichkeit mit den BRUNERschen Thesen geradezu frappierend. Diese Thesen sind von ENGEL - sei es implizit oder explizit - in fruchtbarer Weise auf das Beispiel'Stochastik' angewandt worden. Während ENGELs Vorschläge relativ wenig Systematik besitzen,[1] haben wir versucht, mit Hilfe des BRUNERschen Rahmens, insbesondere der "fundamental ideas" didaktische Ansätze, sowohl die in der Literatur vorliegenden als auch eigene, zu ordnen. Es stellte sich dabei heraus, daß es möglich ist, unsere fundamentalen Grundideen in geeigneten Repräsentationsmodi und in"intellektuell ehrlicher Weise" auf Grundschulebene zu elementarisieren, d.h. in anderen Worten : Stochastik auf der Basis intuitiver Modelle zu betreiben. Dies beantwortet jedoch nicht die Frage, ob die fundamentalen Ideen geeignete fachdidaktische Gliederungshilfen darstellen, bezw. welchen methodologischen Status sie überhaupt für die Fachdidaktiken darstellen. Wir wollen uns deswegen als nächstem Punkt Spekulationen über die Rolle der "fundamental ideas" zuwenden, weil dies der Prüfstein überhaupt dafür scheint, ob BRUNERs Ansatz für die Fachdidaktik fruchtbar ist.

2.1. Der methodologische Status fundamentaler Ideen für die Fachdidaktiken

WITTMANN (1975) hat kürzlich den methodologischen Status fachdidaktischer Prinzipien ausführlich diskutiert. In seinem Beitrag werden didaktische Prinzipien als "konstruktive Regeln im Rahmen einer praktischen Unterrichtslehre" gesehen.

---

1) Vielleicht deswegen, weil er aus diesen Thesen keinen geschlossenen Rahmen baute und diesen ausfüllte, sondern seine Ideen relativ frei von übergeordneten fachdidaktischen Gesichtspunkten produzierte. Dabei steht die Originalität der ENGELschen Ansätze ausser Frage.

Unter den didaktischen Prinzipien, die in dem Beitrag zusammengefasst dargestellt werden, nimmt das Prinzip der Strukturorientierung eine gewisse Sonderrolle ein. Es bezieht sich nämlich, im Gegensatz zu den andern, die mehr oder weniger aus der Psychologie entwickelt worden sind, auf das Fach selber. Die darin zum Ausdruck kommende Forderung, den Unterricht nach den fundamentalen Ideen auszurichten, ist indessen relativ inhaltsleer, solange nicht klar ist, was die fundamentalen Ideen eines Faches sind. Somit kann man die "fundamental ideas" eines Faches im wesentlichen als Ausführungsbestimmungen des Prinzips der Strukturorientierung deuten. Damit teilen sie aber den methodologischen Status der didaktischen Prinzipien! In der Tat stellt sich heraus, daß die in WITTMANN (1975) auf didaktische Prinzipien bezogenen Argumente auch auf die fundamentalen Ideen, wie folgt, zutreffen: [2]

> *(O.) Fundamentale Ideen sind "konstruktive Regeln im Rahmen einer praktischen Unterrichtslehre , die normativer, empirischer oder gemischter Natur sein können."*

Dies ist sicherlich der Fall. Einige unserer Ideen, wie etwa die der Unabhängigkeit oder der Stichprobe sind fundamental auf Grund vielfältiger Erfahrungen, bei anderen dagegen wie etwa der Symmetrie oder der Gleichverteilung steckt sehr viel normative Weltanschauung dahinter. Weiterhin hat sich bei der Konstruktion von Unterrichtsangeboten gezeigt, daß fundamentale Ideen insofern konstruktiv sind, als jeder Lehrer ohne tiefschürfendes Literaturstudium auf relativ unproblematische Weise geeignete Unterrichtsaktivitäten selber konstruieren kann, die strukturgemäß sind, solange er sich an die Ideen hält.

Auch bei der weiteren Begründung und Auffächerung, in welcher Weise fundamentale Ideen konstruktiv sind, können wir so vorgehen, daß wir die auf didaktische Prinzipien bezogenen Argumente in WITTMANN (1975) geeignet umformen und ergänzen.

---

2) Die kursiv gedruckten Stellen dieses Abschnittes sind (außer 6.) nicht dem Wortlaut, wohl aber dem Sinn nach bei WITTMANN (1975) entlehnt.

(1.) Ein Fach lässt sich durch ein geeignetes System von fundamentalen Ideen kurz und einprägsam charakterisieren.

Beispielsweise lässt sich die gesamte LAPLACESCHE Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Idee der Normierung, der Additionsregel, der Gleichverteilung und einiger kombinatorischer Ideen charakterisieren.

(2.) Fundamentale Ideen erlauben eine ökonomische Erklärung und Beschreibung fachdidaktischer Maßnahmen.

Beispielsweise wird durch sie erklärt, warum wir im frühen Stochastikunterricht die Sprache der Bäume und Diagramme gegenüber der Sprache der Mengenlehre bevorzugen oder warum wir das Schwergewicht bei unterrichtlichen Aktivitäten auf mehrstufige Versuche legen.

(3.) Ein System fundamentaler Ideen stellt einen handlichen Leitfaden für die Konstruktion von Unterrichtsvorlagen dar. dar

Statt sich ständig die gesamte Stochastik zu vergegenwärtigen, genügt es, als grobe Leitlinien die fundamentalen Ideen eines Faches vor Augen zu haben. Dies ist vor allem für Lehrer, die auf Grund ihrer meist einseitig strukturmathematisch ausgerichteten Ausbildung nicht den großen Überblick in der Stochastik haben, von Vorteil. So gesehen kann man fundamentale Ideen auch als mittlere Verständigungsebene zwischen Fachwissenschaftlern und Schulleuten ansehen.

(4.) Fundamentale Ideen können eine fachdidaktische Anreicherung von Unterrichtsvorlagen anregen.

Beispielsweise hat uns die Idee der Zufallsvariablen und ihrer Verteilungen dazu angeregt, in diesem Zusammenhang kombinatorische Probleme und das PASCALsche Dreieck zu betrachten. (vgl. S. 287)

(5.) Fundamentale Ideen erleichtern es der empirischen Forschung, Hypothesen zu finden, deren Untersuchung für die Praxis interessant ist.

Beispielsweise ist es bedauerlich, daß sich die Entwicklungspsychologen bei ihren Untersuchungen durchaus nicht einig sind, was relevante stochastische Begriffe sind (vgl. S. 146). Ein

System von fundamentalen Ideen, wie es in dieser Arbeit vorgelegt wird, könnte eine Anregung und Hilfe für die Psychologie sein, sich stärker als bisher geschehen, der Untersuchung der Ideen : Unabhängigkeit, Zufallsvariable und Gleichverteilung zuzuwenden, die gegenüber Versuchen zu Urnenziehungen stark vernachlässigt werden. (vgl. S. 146f)

(6.) Fundamentale Ideen könnten dazu verhelfen, interdisziplinären Tagungen oder Arbeitsgruppen, die sich beispielsweise mit Fragen des Stochastikunterrichts befassen, einen geeigneten Rahmen zu geben.

Es ließe sich gut vorstellen, dass auf einer der in unregelmäßigen Abständen in OBERWOLFACH stattfindenden Tagungen zum Thema :"Stochastikunterricht" Fachleute aus verschiedenen Disziplinen das Rahmenthema :"Stochastische Unabhängigkeit" (4. Idee) behandeln.
Der Fachmathematiker berichtet etwa über die Stellung der Unabhängigkeit im mathematischen Kontext sowie über tangierende Sätze, wie etwas den Satz vom ausgeschlossenen Spielsystem.
Der Entwicklungspsychologe berichtet über die Entwicklung der Unabhängigkeitsidee beim Kinde oder über die Art, wie Erwachsene in Spielsituationen, etwa in Casinos, damit umgehen.
Der Fachdidaktiker kann Möglichkeiten aufweisen, die Unabhängigkeit durch Spiele etc. früh vorzubereiten.
Der Fachlehrer kann über praktische Erfahrungen berichten etc...

Wir wollen unsere Spekulationen zunächst abschließen, bevor wir aber auf Fragen der Unterrichtsplanung eingehen, vor einem Missverständnis warnen, das sich beim Leser auf Grund unseres Verständnisses der fundamentalen Ideen als "Konstruktionshilfen"einstellen könnte:

Es zeigte sich bei der Konstruktion unserer Unterrichtsaktivitäten klar, daß aus dem allgemeinen BRUNERschen Rahmen, auch nachdem wir eine Liste fundamentaler Ideen der Stochastik aufgestellt hatten, unterrichtliche Aktivitäten nicht einfach abgeleitet werden konnten, genausowenig wie aus der PIAGETschen Psychologie didaktische Prinzipien"deduziert"werden konnten.

Vielmehr mußten wir im IV. Kapitel noch einmal in einer Gesamtschau den groben Rahmen, den uns BRUNER gegeben hat, und

den wir in den ersten Kapiteln ziemlich isoliert aufgefüllt haben, verfeinern zu einer Reihe von Forderungen und Prinzipien für einen frühen Stochastikunterricht. Dazu kamen eine Reihe von bewährten fachdidaktischen Prinzipien. An Hand dieser aufgestellten Forderungen und vorliegenden Prinzipien, sowie mit dem Wissen, welche Ideen fundamental sind, sind wir zu den"Quellen" zurückgegangen und haben mathematische Inhalte bearbeitet, strukturiert und elementarisiert.

Es zeigte sich so bei näherer Betrachtung des Zusammenwirkens der allgemeinen BRUNERschen Konzeption und der konkreten Unterrichtskonstruktion eine typische fachdidaktische Methode, nämlich das "korrespondierende Verfahren", wie es schon von WINTER (1972) in einer Arbeit zur Lernzielproblematik beschrieben wurde.

2. 2. "Korrespondierende Verfahren" als fachdidaktische Methode"

WINTER(1972) zeigt, dass es einerseits nicht möglich ist, aus allgemeinsten Lernzielen wie etwa denen von v.HENTIGs (1969) Curricula zu deduzieren, dass andererseits aber "ein reiner inhaltlicher Pragmatismus, ein sogenanntes voraussetzungsfreies Curriculum auch nicht denkbar ist." (ibid.S.70) und kommt zum Schluss:

> "Man muss sowohl das ganze Fach als auch die Inhalte im einzelnen begründen, der Unterricht muß einen Sinn haben. Die Wolle allein strickt sich nicht selbst, man braucht ein Strickmuster und ein Ziel (Wolljacke). Was bisher aber in der Breite fehlt (trotz der vielen Ansätze von Didaktikern in Vergangenheit und Gegenwart) ist eine überzeugende Einbettung der Lerninhalte in allgemeinere Lernziele... Wir wissen, daß das rein deduktiv nicht möglich ist, selbst wenn man sich auf allgemeinere Lernziele geeinigt hätte, was aber ja auch nicht der Fall ist. Daher bleibt eigentlich nur ein korrespondierendes Verfahren derart, daß allgemeine Lernziele und -inhalte unter wechselseitiger Beeinflussung gleichzeitig gesehen werden. Es muß also ein Zusammenspiel verschiedener Blickrichtungen sein, deren Ausfluß dann ein möglicher erster Entwurf eines Curriculums darstellte."

Eine wirksame Methode, um dieses "korrespondierende Verfahren" durchzuführen, sieht WINTER in der Verwendung von Lernzielen mittlerer Hierarchie, die wir nachstehend zur Erinnerung kurz aufführen:

Allgemeine Haltungen und Fähigkeiten (S. 71)

1. Der Schüler soll argumentieren lernen.
2. Der Schüler muß lernen, neue Situationen zu erzeugen und mit neuen Situationen fertig zu werden.
3. Der Schüler soll lernen, wie man eine inner - oder aussermathematische Situation mit mathematischen Mitteln ordnen kann.

Anzustrebende intellektuelle Grundfertigkeiten

4. Der Schüler kann klassifizieren
5. Der Schüler kann ordnen
6. Der Schüler kann " analogieren."
7. Der Schüler kann "generalisieren."
8. Der Schüler kann "formalisieren."

Ohne dies eigens zu thematisieren, haben wir uns bei der Planung unserer Unterrichtsangebote ständig auch an den WINTERschen Lernzielen mittlerer Hierarchie orientiert. Die von uns entworfenen und zusammengestellten Aktivitäten ordnen sich, was Einstieg, Form und Inhalt betrifft, in starkem Maße diesen Lernzielen unter. Was jedoch wichtiger ist an dieser Stelle:
Ein "korrespondierendes Verfahren", wie es WINTER zwischen allgemeinen Lernzielen und Feinzielen oder Lerninhalten vorschwebt, haben wir im Grunde auch,letzten Endes auf BRUNERs Anregung hin, praktiziert, nämlich zwischen der STRUKTUR der Stochastik und den in der Literatur vorgeschlagenen EINZEL-AKTIVITÄTEN im Stochastikunterricht., Wir haben dabei den Versuch unternommen, um es analog zu WINTERs Worten auszudrücken, die vorliegenden Einzelergebnisse überzeugender, als bisher geschehen, einzubetten in die Auffassungen zur Struktur des Faches. Konkret heißt das:
Einerseits kennen wir die allgemeine Struktur des Faches, in unserm Falle der Stochastik. Hieraus lassen sich aber keine Unterrichtsbeispiele und - aktivitäten deduzieren. Andererseits liegen eine Reihe von Aktivitäten, Spiele und sonstigen Beispielen für den Stochastikunterricht vor. Diese isolierten Beispiele definieren jedoch keine Methode.

Aus dieser Problematik, die sich auf den bekannten Satz *allgemeine Struktur ist leer - Beispiele allein machen blind* [3] reduzieren lässt, hilft uns nur ein korrespondierendes Verfahren zwischen Struktur und Einzelbeispielen, wobei die "fundamental ideas" wesentliche Hilfsmittel darstellen.[4]

Weiterhin war ganz entscheidend bei unserer Konstruktion von Unterrichtsangeboten ein korrespondierendes Verfahren zwischen fundamentalen Ideen und didaktischen Prinzipien, implizit auch zwischen fundamentalen Ideen und Lernzielen mittlerer Hierarchie.

Zusammenfassend lässt sich die Eigenart des so verstandenen fachdidaktischen Arbeitens, wie wir es für den Stochastikunterricht praktizierten, folgendermaßen beschreiben:

> Nur im Zusammenwirken des Bewusstseins, was wirklich fundamental ist, allgemeiner didaktischer Prinzipien, mittlerer Lernziele, fachspezifischer Forderungen (die in der Algebra anders sein werden als in der Stochastik) und der Offenheit des Blickwinkels für die Quellen, für neue Beispiele, neue Verfahren, neue Probleme ... kann die Fachdidaktik den allgemeinen Rahmen, wie er uns von BRUNER vorgegeben wurde, ausfüllen.

Diese Aufgabe kann nicht durch bloße Addition von Beiträgen des Faches, der Psychologie, der Pädagogik sowie anderer Bezugswissenschaften geleistet werden, sondern verlangt den eigenen integrativen Ansatz der Fachdidaktik.

---

3) vgl. SCHMIDT 1974 S.24f "...allgemeine Lernziele ohne fachliche Lernziele sind leer; fachliche Lernziele ohne allgemeine Lernziele sind blind; womit denn auch der korrespondierende Bezug zwischen allgemeinen und fachlichen Lernzielen angedeutet ist."

4) Sie entsprechen - von ihrer Stellung zwischen Struktur und Einzelbeispielen her - den WINTERschen Lernzielen

L I T E R A T U R

Abkürzungen für Zeitschriftentitel

AM	Annals of Mathematics
AML	Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung
ARCH	Archimedes
AT	The Arithmetic Teacher
CD	Child Development
ESM	Educational Studies in Mathematics
IJME	Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.
JEE	Journal of Experimental Education
JEP	Journal of Experimental Psychology
JGP	Journal of Genetic Psychology
LEM	L'Enseignement Mathématique
LZU	Lernzielorientierter Unterricht
MG	Mathematical Gazette
MiS	Mathematik in der Schule
MNU	Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht
MPS	Mathematisch-Physikalische Semesterberichte
MT	Mathematics Teacher
MU	Der Mathematikunterricht
MZ	Mathematische Zeitschrift
PM	Praxis der Mathematik
SA	Scientific American
SSM	School Science and Mathematics

AEBLI, H. *Über die geistige Entwicklung des Kindes* Stuttgart 1963

AEBLI, H. *Psychologische Didaktik.* Stuttgart 1968[3]

AEBLI, H. *"Die geistige Entwicklung als Funktion von Anlage, Reifung, Umwelt- und Erziehungsbedingungen."* Begabung und Lernen. Stuttgart 1972/8 : 151-191

ADLER, M. J. *"Some Educational Implications of the Theories of Jean Piaget und J. S. Bruner"* Canadian Educational Research Digest, 1965, 5:5-13

ALEXANDROV, P.S. (Hrsg.) Die Hilbertschen Probleme. Leipzig 1971

ANDELFINGER, B/NESTLE, F. Wege zu einer neuen Schulmathematik Freiburg 1967

ARNDT, M. Didaktische Spiele. Stuttgart 1974

ATHEN, H. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Hannover 1968[2]

ATHEN, H. *"Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen und statistische Beurteilung"* MNU 24, 1971a: 401-410

ATHEN, H. *"Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf einfache stochastische Prozesse"* MNU 24, 1971b: 200-210

ATHEN, H. *Einführung in die Stochastik im Mathematikunterricht der Unterstufe. Handschriftenreihe der Landesstelle MNU; Recklinghausen o. J.*

ATHEN H./GRIESEL, H. Mathematik heute 6. Dortmund 1971
Mathematik heute 7. Dortmund 1973

AUHOFER, H. Aberglaube und Hexenwahn heute. Freiburg 1960

BAMMERT, P. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg 1974 (Diff.)

BANGEN, G./STENDER, R. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. Frankfurt 1973 (3)

BAUER, H. W. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie*. Berlin 1964

BAUERSFELD, H. "Einige Bemerkungen zum Frankfurter Projekt und zum 'alef'-Programm". *Materialien zum Mathematikunterricht der Grundschule*: 237 - 246, Frankfurt 1972

BERGMANN, H. *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik in einem Auftaukurs des 9. Schuljahres*. (Pädagogische Prüfungsarbeit) Bielefeld 1973

BESUDEN, H. "Über Gewissheit und Unmöglichkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung." *MNU 12* 1959/60:370-371

BETH, E.W./PIAGET, J. *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht 1966

BLOOM, B. S. *Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich*. Weinheim 1972

BÖHME, W. *Erscheinungsformen und Gesetze des Zufalls*. Braunschweig 1964

BÖHME, W. "Ein Klassenexperiment zur Wahrscheinlichkeitsrechnung." *PM 1966*: 14 - 15

BOREL, E. "A propos of a treatise on probability." (1924) in: Kyburg, H.E./Smokler, H.E. (Hrsg.) *Studies in subjective probability*. New York 1964: 45-60

BOUDON, R. *A quoi sert la notion de "structure"?* Editions Gallimard 1968

BREIMAN, D. *Probability*. Reading, Massachusetts 1968

BROAD, C. D. *Induction, Probability and Causation*. Dordrecht 1968

BRUNER, J. S. *The process of education.* Cambridge Massachusetts 1960

BRUNER, J. S. *Towards a theory of instruction.* Cambridge Massachusetts 1967

BRUNER, J. S. *Der Prozess der Erziehung.* (dt. Ausgabe von Bruner 1960) Düsseldorf 1970

BRUNER, J./OLVER R.R./GREENFIELD, P.M. *Studien zur kognitiven Entwicklung.* Stuttgart 1971 (1966)

BRUNER, J./GOODNOW, J.J./AUSTIN, G.A. *A study of thinking.* New York 1956

BRUNSWIK, E. "Probability as a determiner of rat behavior" *JEP 25*, 1939: 175-197

BUNT, L. N. H. "Unterricht in Statistik an holländischen Schulen." *MPS 6*, 1959: 299-310

BUNT, L. N. H. "Methoden für den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik". *Les repercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement.* Luxembourg 1966: 247-269

CAMBRIDGE CONFERENCE ON SCHOOL MATHEMATICS *Goals for School Mathematics.* Boston 1963

CANTOR, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* Band I - IV. Stuttgart 1965 (1899)

CARNAP, R. "Probability as a guide in life". *The Journal of Philosophy 44* 1944: 141-148

CARNAP, R. "The two concepts of probability." *Philosophy and Phenomenological Research 1945*: 513-532

CARNAP, R. *Logical foundations of probability.* Chicago 1950

CARNAP, R. "What is probability?" *SA 189*, 153: 128-138

CARNAP, R./STEGMÜLLER, W. *Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit*. Wien 1959

CLARKE, L. E. "Birthday problem". MG 55, 1971: 70-72

COCHRAN, W. G. *Stichprobenverfahren*. Berlin 1972

COHEN, J. "Subjective probability". SA 197, 1957: 128-138

COHEN, J./HANSEN, M. *Glück und Risiko*. Frankfurt 1961 (1955)

CONWAY, F. "The teaching of statistics". MG XLIV, 1960: 81-83

CRANDALL, V. J./SOLOMON, D./KELLAWAY, R. "A comparison of the patterned and nonpatterned probability learning of adolescent and early grade school age children". JGP 99, 1961: 29-39

CZUBER, E. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung*. Leipzig 1914

DAUBLEBSKY, B. *Spielen in der Schule*. Stuttgart 1973

DAVID, F. N. (Hrsg.) *Research papers in statistics*. Festschrift for Jerzy Neyman. London 1966

DAVIES, C. M. "Development of the probability concept in children". CD 36, 1965: 779-788

DAVIES, H. M. "Practical experimentation in the teaching of basic statistics". MG XLVIII 1964: 271-280

DAVIS, R. "The structure of mathematics and the structure of cognitive development". The Journal of Children's Mathematical Behavior 1. 1971/72: 71-99

DE CECCO, J. P. *The Psychology of Learning and Instruction*. New Jersey 1968

DIENES, Z. P. — *Aufbau der Mathematik.* Freiburg 1969[3]

DIENES, Z. P. — *Die sechs Stufen im mathematischen Lernprozess.* Freiburg 1971

DIENES, Z. P./GOLDING, E. W. — *Methodik der modernen Mathematik.* Freiburg 1970

DINGES, H. — *Zum Unterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (unveröffentlichtes Manuskript) 1973

DINGES, H. — "Relative Häufigkeiten". (unveröffentlichter Vortrag in Oberwolfach am 14.1.1975)

DÖRGE, K. — "Zu der von R. v. Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung." MZ 32, 1930: 232-258

DÖRGE, K. — *Wahrscheinlichkeitsrechnung für Nichtmathematiker.* Berlin 1947

DOHERTY, J. — *Levels of four concepts of probability possessed by children of fourth, fifth and sixth grade before formal instruction.* University of Missouri 1965

DONALDSON, M. — "Review of Piaget and Inhelder". British Journal of Psychology 51, 1960: 181-184

DONAT, C. D. — "Mathematiklektion im Pionierlager". MiS 6 1968: 284-297

DONAT, C. D. — "Empfehlungen zur methodischen Gestaltung eines Lehrgangs der Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeisrechnung" MiS 7, 1969: 222-230 und 853-861

DORSCH, F. — *Psychologisches Wörterbuch,* Hamburg 1970

DREETZ, W. — "Eine Einführung in die Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Schule". MU 6, 1960, Heft 3: 16-31

DRENCKHAHN, F. — (Hrsg.) Der mathematische Unterricht für die 6 - 15 jährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. Göttingen 1958

DUMONT, M. "Quelques jeus combinatoires". Le Courrier de Recherche Pêdagogique 1968, 33: 57-63

ENGEL, A. "Mathematische Forschung und Didaktik der Wahrscheinlichkeitstheorie". Les repercussions de la recherche mathêmatique sur l'enseignement. Luxembourg 1965: 271-288

ENGEL, A. "Initiations à la théorie des probabilités." Tendances nouvelles de l'einseignement des mathématiques I (Unesco) Paris 1966a: 159-174

ENGEL, A. "Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie". MU 12, Heft 4, 1966b: 5-20

ENGEL, A. "Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie im Unterricht der Unter- und Mittelstufe der Gymnasien." 1964 in: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Göttingen 1967: 189-210

ENGEL, A. "The relevance of modern fields of applied mathematics for mathematical education". ESM 1969a: 257-269

ENGEL, A. "Wahrscheinlichkeit und Statistik im Schulunterricht". Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an der höheren Schule. Stuttgart 1969b: 22-32

ENGEL, A. "Teaching probability in intermediate grades". IJME 2, 1971a: 243-294 (auch in: RADE 1970)

ENGEL, A. "Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle". MU 17 Heft 3, 1971b: 5-

ENGEL, A. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 1 Stuttgart 1973

ENGEL, A./ VARGA, T./WALSER, W. Zufall oder Strategie, Stuttgart 1974

FELLER, W. "Über die Existenz sogenannter Kollektive". Fundamenta Mathematicae 32. 1939: 87-96

FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1, 2* New York 1968

FÉRAUD, L. "Sur l'enseignement de la statistique." LEM 17, 1971: 93-97

FINETTI, B. DE "La Prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives." Annales de l'institut Henry Pioncaré 7 (1937). Englische Übersetzung in: Kyburg 1964

FINETTI, B. DE "Les problèmes psychologiques sur les probabilités subjectives." Journal de psychologie normale et pathologique 52, 1955: 253-259,

FINETTI, B. DE *Probability, induction and statistics.* London 1972

FINSLER, P. "Über die mathematische Wahrscheinlichkeit". Elemente der Mathematik 2, 1947: 108-114

FISCHBEIN, E. "Einseignement mathématique et développement intellectuel." ESM 2, 1969: 290-306

FISCHBEIN, E. "Intuition, structure and heuristic methods in the teaching of mathematics." Developments in mathematical education. Cambridge University Press 1973: 222-232

FISCHBEIN, E./BARBAT, I./MINZAT, I. "Intuitions primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités." ESM 4, 1971: 264-280

FISCHBEIN, E./PAMPU, I./MINZAT, I. "L'intuition probabiliste chez l'enfant". Enfance 2, 1967: 193-208

FISCHBEIN, E./PAMPU, I./MINZAT, I. "Initiation aux probabilités à l'école élémentaire." ESM 2, 1969: 16-31

FISCHBEIN, E./PAMPU, I./MINZAT, I. "Effects of age and instruction on combinatory ability in children." The British Journal of Educational Psychology 40, 1970a: 261-270

FISCHBEIN, E./PAMPU, I./MINZAT, I. "Comparison of ratios and the chance concept in children." CD 41, 1970b: 377-389

FISCHER, F. E. "Empirical evidence for the central limit theorem: a classroom demonstration." MT 5, 1971: 415-417

FISCHER, L. "Mathematisierung und Modellbegriff in den Naturwissenschaften." MU Heft 3; 1971: 67-74

FISHER, R. A. Statistic methods and scientific inference. New York 1956

FISZ, M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin 1965 (3) / (1958 -1-)

FLACHSMEYER, J. Kombinatorik. Berlin 1969

FLADT, K. Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts. Frankfurt 1959

FLADT, K. /KRAFT, A./DREETZ, W. Mathematisches Unterrichtswerk Bd. 5 (Analysis Oberstufe). Hannover 1955

FLAVELL, J. H. The developmental psychology of Jean Piaget New Jersy 1963

FLECHSIG, K.H. u.a. "Die Steuerung und Steigerung der Lernleistung durch die Schule." Begabung und Lernen Stuttgart 1972 (8): 449-504

FLOER, J./SCHIPPER, W. "Zahlspiele für Vorschulkinder" in: Die Welt des Kindes. München 1974

FORD, G.W./PUGNO, L. Wissensstruktur und Curriculum. Düsseldorf 1972

FORD, B./HALL, G.G. "Model building- an educational philosophy for applied mathematics." IJME 1, 1970: 77-84

FRANZ, J. "Wahrscheinlichkeit und Mengenlehre." ARCH 19, 1967: 65-70

FREUDENTHAL, H. "Models in applied probability." The concept and the role of the model in applied mathematics and natural and sicial sciences. Dordrecht 1961: 78-88

FREUDENTHAL, H. *Wahrscheinlichkeit und Statistik.* München 1963a

FREUDENTHAL, H. "Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?" *LEM 9*, 1963b: 28-44

FREUDENTHAL, H. "Why to teach mathematics as to be useful." *ESM 1*, 1968: 3-8

FREUDENTHAL, H. "The aims of teaching probability." in: RADE 1970: 151-168

FREUDENTHAL, H. "The empirical law of large numbers, or the stability of frequences." *ESM 4*; 1972: 484-490

FREUDENTHAL, H. "Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule." *Didaktik der Mathematik 1*, 1973a: 2-11

FREUDENTHAL, H. "General ideas by comprehension or apprehension." *Vortrag beim 'International Colloquium on the theoretical problems of teaching mathematics in the primary schools'. Eger 1973b*

FREUDENTHAL, H. *Die Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart 1973/

FREUDENTHAL, H. "The crux of course design in probability." *ESM 5*, 1974: 261-277

FREUND, H./ SORGER, P. *Denken mit Lego.* Freiburg 1971

FREY, G. "Symbolische und ikonische Modelle." *The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences.* Dordrecht 1961: 89-97

FRICKE, A. "Lernprozess und operative Methode im elementaren mathematischen Unterricht." *MU 14, Heft 2*, 1968: 33-56

FURTH, H.G. *Intelligenz und Erkennen.* Frankfurt 1972

FURTH, H. G. *Piaget für Lehrer.* Düsseldorf 1973

GAGNÉ, R. M. *Die Bedingungen des menschlichen Lernens.* Hannover 1969. (1965 -1-)

GEISSLER, R. "Zum Gesetz der großen Zahlen." MNU 5, 1962/63: 213-215

GINSBURG, H. "Children's estimates of proportions." CD 38, 1967: 205-212

GNEDENKO, B. W. *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin 1968

GNEDENKO, B. W. *The theory of probability.* Moskau 1969

GNEDENKO, B. W./CHINTSCHIN, A.J. *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin 1971

GNEDENKO, B. W./SHURBENKO "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik." MiS 7, 1969: 170-210

GNIRK, H./LUBESEDER, U./HOMANN, G. *Strategiespiele für die Grundschule.* Hannover 1970

GÖHNER, H./WEBER, H. "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Grundschule." Die Schulwarte 6, 1971: 40-54

GOLDBERG, S. *Die Wahrscheinlichkeit.* Braunschweig 1964. (1960)

GOLDBERG, S. "Probability judgements by preschool children: task conditions and performance." CD 37, 1966: 157-167

GOLDMAN, D. E./DENNY, J. "The ontogenesis of choice behavior in probability and sequential programs." JGP 102, 1963: 5-18

GOSMAN, H. Y. "Mastering the basic facts with dice." AT 1973, Vol. 20 Nr. 5: 330-331

GRATCH, G. "The development of the expectation of the non-independence of random events in children." CD 30, 1959: 217-227

GRIESEL, H. "Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik." Beiträge zum Mathematikunterricht 1972. Hannover 1973: 72-81

HADAMARD, J. An Essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton 1945

HANDBUCH DER PSYCHOLOGIE, Bd. 1-12, Göttingen 1959ff

HARTWIG, H. "Naturwissenschaften und sozialwissenschaftliche Statistik." Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 112 . 1956: 252-266

HECKHAUSEN, H. "Entwurf einer Psychologie des Spielens." Psychologische Forschung 27; 1964: 225-243

HEIMANN, P./OTTO, G./SCHULZ, W. Unterricht-Analyse-Planung Hannover 1972. (1965 -1-).

HELMA, G. "Über Monte-Carlo-Methoden." MNU 13, 1960: 298-302

HELMA, G. "Über Streichholzspiele im Unterricht." MNU 17, 1964/65: 117-123

HENDRICKS, W. "Interview mit Wolfgang Klafki über Probleme und neue Aspekte der 'Didaktischen Analyse'." Die Deutsche Schule 1972: 138-148

HENGST, M. Einführung in die mathematische Statistik. Mannheim 1967

HENGST, M. "Zur Existenz der Wahrscheinlichkeit." MU 16, Heft 4, 1971: 60-84

v. HENTIG, H. "Allgemeine Lernziele." in: Lernziele der Gesamtschule. Dt. Bildungsrat.-Gutachten und Studien der Bildungskommission 12, Stuttgart 1969

HERMES, H. "Über eine logische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie." MPS 5, 1957: 214-224

HIGGINS, J. E. "Probability with marbles and a juice container." AT 1973, Vol. 20, Nr. 3: 165-166

HILBERT, D. Gesammelte Abhandlungen Band 3, New York 1965

HILGARD, E. R./ BOWER, G.H. Theorien des Lernens, I, II. Stuttgart 1971[2] (1948)

HINDERER, K. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin 1972

HOEMAN, H. W./ROSS, B. M. "Children's understanding of probability concepts." CD 42; 1971: 221-236

HÖFLER, A. Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1910

HOLE, V. Erfolgreicher Mathematikunterricht. Freiburg 1973

INEICHEN, R. "Der Satz von Bernoulli und das Gesetz der großen Zahlen." MU 6, Heft 3, 1960a: 32-36

INEICHEN, R. "Über die Grundlagen und den Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung." MU 6, Heft 3; 1960b: 7-15

INEICHEN, R. Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Luzern 165a

INEICHEN, R. "Über den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik an höheren Schulen." Biometrische Zeitschrift 7, 1965b: 170-183

INEICHEN, R. "Eine Bemerkung zur logischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie." MPS 13, 1966: 79-82

INHELDER, B. "Ein Beitrag der Entwicklungspsychologie zum mathematischen Unterricht." in: Drenckhahn 1958: 87-99

INHELDER, B./SINCLAIR, H. "Das Lernen kognitiver Strukturen." in: Pädagogische Psychologie 1 (Graumann/Heckhausen Hrsg.) Frankfurt 1973

INHELDER, B./SINCLAIR, H./BOVET, M. *Apprentissage et structures de la connaissance*. PUF Paris 1974

JÄSCHKE, K. H. "Zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht." *MNU 20*, 1967: 28-31

JEFFREYS, H. *Theory of probability*. Oxford 1938

JEGER, H. "Ein Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung im modernen Mathematikunterricht." *MU 12*, 1966, Heft 4: 21-47

JOHN, V. *Geschichte der Statistik*. Wiesbaden 1968 (Nachdruck einer Ausgabe von 1884).

JUHOS, B./KATZENBERGER, W. *Wahrscheinlichkeit als Erkenntnisform*. Berlin 1970

KAC, M./ULAM, S.M. *Mathematics and logic*. New York 1968

KAMKE, E. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* Leipzig 1932

KANJI, G. K. "The role of the statistical laboratory in the teaching of statistics." *IJME 5*, 1974: 53-57

KAPPOS, D.A. *Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume*. Berlin 1960

KARASCHEWSKI, H. *Irrwege moderner Rechendidaktik*, Essen 1969

KASS, N. "Risk and decision making as a function of age, sex, and probability preference." *CD 35*, 1964: 577-582

KAUFMAN, B./STEINER, H. "The CSMP approach to mathematical education. *ESM 1*, 1968/69: 312-326

KEISLAR, E./SHULMAN, L. M. *Learning by discovery*. Chicago 1966

KELLER, M. "Spiel und kognitives Lernen, ein Widerspruch?" in: Daublebsky 1973: 252-283

KEYNES, J. M. A treatise on probability. London 1921

KHINCHIN, A. Y./GNEDENKO, B.V. The teaching of mathematics. London 1968

KLAFKI, W. "Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung." in: Roth, H./Blumenthal, A. (Hrsg.) Didaktische Analyse." Hannover 1964: 5-34

KOHLER, I. "Gedanken zur instinktiven Anwendung der Wahrscheinlichkeit." Studium generale 1951: 110-114

KOLMOGOROFF, A.N. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und in die Kombinatorik." MiS 7 1969: 296-308

KOLMOGOROFF, A.N. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933.
Foundations of probability, New York 1950
"The theory of probability. in: Mathematics, its content, methods and meaning. Cambridge 1965[2] (Moskau 1956 -1-): 229-264

KOMORITA, S.S. "Factors which influence subjective probability." JEP 58, 1959: 386-389

KOOPMANN, B. O. "The axioms and algebra of intuitive probability." AM 41, 1940a: 269-292

KOOPMANN, B. O. "The basis of probability." in: Kyburg/Smokler 1964 1940b

KOOPMANN, B.O. "Intuitives probabilités." AM 42, 1941: 169-187

KOßWIG, F. W. "Einführung in die Mengenlehre in der 5. Klasse mit Hilfe von Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung." Vortrag bei der MNU Jahrestagung 1972 in Köln.

KOßWIG, F. "Ein propädeutischer Kurs in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Sexta." Heft 78 o. J. Handschriftenreihe des Landesinstitutes für schulpädagogische Bildung, Abt. III/Außenstelle Recklinghausen.

KREYSZIG, E. Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Göttingen 1968 (3).

KRICKEBERG, K. Wahrscheinlichkeitstheorie. Stuttgart 1963

KRIES, J. von Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg 1886

KRISTENSEN, E. Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an der höheren Schule. Stuttgart 1969: 11-21

KRYGOWSKA, A. Z. "Développement de l'activité mathématique des élèves et rôle des problèmes dans ce développement." LEM 12, 1969: 293-320

KRYGOWSKA, A. Z. "Processus de la mathématisation dans l'enseignement." ESM 1, 1968: 9-16

KÜTTING, H. "Der Additionssatz und der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung." MU 8 Heft 1, 1962: 39-63

KUTSCHERA, F. v. Wissenschaftstheorie. München 1972

KYBURG, H. E./SMOKLER, H.E. (Hrsg.) Studies in subjective probability. New York 1964

LANGE, L. H. "Die Struktur der Mathematik." in: Ford/Pugno 1972 (1964): 77-98

LANGE, W. "Stand und Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule." MiS Heft 11; 1971: 673-686

LANGFORD: 1971 vw. Clarke 1971

LEAKE, L. — *The status of three concepts of probability in children of 7 th, 8 th and 9 th grades.* University of Wisconsin 1962.

LEFFIN, W. W. — *A study of three concepts of probability possessed by children in the 4., 5., 6. and 7. grades.* Techn. Report Nr. 170. University of Wisconsin 1971

LEHMANN, E. L. — *Testing statistical hypotheses.* New York 1970 (1959[1])

LENNÉ, H. — *Mathematikdidaktik in Deutschland.* Stuttgart 1969

LERAY, J. — *"L'initiation aux mathématiques."* LEM 12, 1966: 235-241

LIETZMANN, W. — *Methodik des mathematischen Unterrichts.* 2. Teil Leipzig 1916

Methodik des mathematischen Unterrichts. Heidelberg 1961 (3. neubearbeitete Auflage v. Stender -Hrsg.-)

LINDLEY, D. V. — *Introduction to probability and statistics from a Bayesian viewpoint.* Cambridge University Press 1965

LIPSCHUTZ, S. — *Theory and problems of probability.* New York 1968

LOOMIS, L. H. — *"On the representation of complete Boolean algebras."* Bull. Am. math. soc. 53; 1947: 757-760

LOVELL, K. — *The growth of basic mathematical nd scientivic concepts in children.* London 1962

LUDWIG, G. — *Deutung des Begriffs "physikalische Theorie" und axiomatische Grundlegung der Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik durch Hauptsätze des Messens.* Berlin 1970

LUKACS, O. — *What to teach from combinatorics, probabilities and statistics in the primary schools.* Vortrag beim 'International colloquiom on the theoretical problems of teaching mathematics in the primary schools.' Eger 1973

MADER, O. *Bericht über eine Lehrplanabsprechung im Fach Mathematik.* Mathematik und Physik in der Schule 2. Heft 1; 1955: 33-38

MAIBAUM, G. *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin 1972

MAIER, H./PLÖßE, W. 'Mathematische Lernspiele' in: Meschkowski, H. Didaktik der Mathematik I . Stuttgart 1972

MATALON, B. "Apprentissage en situations aléatoires et systématiques." La logique des apprentissages PUF Paris 1959

MATALON, B. "Epistémologie des probabilités." La logique et connaissance scientifique. Editions Gallimard 1967: 526-552

MATHEMATISCHES LABOR. Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Stuttgart 1972

MEISSNER, O. Wahrscheinlichkeitsrechnung Band I. Leipzig 1919

MENGES, G. Grundriss der Statistik, Teil 1. Köln 1968

MESCHKOWSKI, H. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mannheim 1962

MESCHKOWSKI, H. "Zur Einführung" MU 17 Heft 4; 1971: 3

MESCHKOWSKI, H. Didaktik der Mathematik I. Stuttgart 1972

MESSICK, S.J./SOLLEY, C.M. "Probability learning in children - some exploratory studies. JGP 90, 1957: 23-32

MISES, R. von "Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung." MZ 5, 1919: 52-99

MISES, R. von Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien 1928

MONTADA, L. Die Lernpsychologie Jean Piagets. Stuttgart 1970

MORGENSTERN, D. "Der Aufgabenbereich von Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik." MU 8 Heft 1 1962: 5-15

MORGENSTERN, D. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin 1964

MOSTELLER, F. u.a. Probability: a first course. Reading, Massachusetts: 1961

MOSTELLER, F. "What has happened to probability in the high school?" MT 8; 1967: 824-831

MÜLLER, D. W. "Thesen zur Didaktik der Mathematik." MPS 1974: 164-169

MÜLLER, G. N./MÜLLER W. "Methodische und didaktische Bemerkungen zur Behandlung von Permutationsmaschinen in der Grundschule." Didaktik der Mathematik 3, 1973: 226-232

MULINS, E.R./ROSEN, D. Concepts of probability. New York 1972

NAUMANN, N. (Hrsg.) Der moderne Strukturbegriff. Materialien zu seiner Entwicklung. Darmstadt 1973

NEYMAN, J. 1966 vw. David 1966

NEYMAN, J. A selection of early statistical papers of J. Neyman. Cambridge University Press 1967

NICKEL, H. "Zur Bedeutung der Entwicklungspsychologie für Erziehung und Unterricht." Psychologie und Unterricht 20. Jg. 1974:

NIMAN, J./POSTMAN, R. D. "Probability on the geoboard." AT Vol. 20 Nr. 3, 1973: 167-170

NOLFI, P. Die Idee der Wahrscheinlichkeit. Neuchâtel 1956

OBERSCHELP, W. "Die Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie." MPS 5, 1957: 49-62

OBERSCHELP, W. "Wahrscheinlichkeitsrechnung." Fischer-Lexikon Mathematik 2. Frankfurt 1966: 346-375

OEHL, W. Der Rechenunterricht in der Hauptschule. Hannover 1965

OERTER, R. Moderne Entwicklungspsychologie. Donauwörth 1973

Psychologie des Denkens. Donauwörth 1971

OFFENBACH, S.I. "Studies of children's probability learning behavoir: effects of reward and punishment at two age levels." CD 35, 1964: 715-

OFFENBACH, S.I. "Studies of children's probability learning: effect of method of event frequency at two age levels. CD 36, 1965: 952-961

OJEMANN, R./MAXEY, E.J./SNIDER, B.C. "Effects of guided learning experiences in developing probability concepts at 3-rd grade. JEE 33, 1965a: 321-330

OJEMANN, R./MAXEY, E.J./SNIDER, B.C. "Effect of guided learning experiences in developing probability concepts at the fifth grade level." Preceptional and motor skills 1965b: 415-427

ORE, OYSTEIN "Pascal and the invention of probability theory." American Mathematical Monthly 67; 1960: 409-419

OTTE, M. "Notizen zum Problum der Interdisziplinarität." Schriftenreihe des IDM Nr. 1; Bielefeld 1974:

PAGE, D. "Probability." in: The growth of mathematical ideas. Twenty-fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Washington 1959: 229-271

PANKNIN, M. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik für die Klassen 1 - 6. Bochum 1972

PAWLOWSKI, Z. *Einführung in die mathematische Statistik.* Berlin 1971

PETTER, G. *Die geistige Entwicklung des Kindes im Werk von Jean Piaget.* Bern 1966

PFANZAGL, J. *Allgemeine Methodenlehre der Statistik.* Berlin 1967[4]

PIAGET, J. *Das moralische Urteil beim Kinde.* Frankfurt 1973a (1932[1]

PIAGET, J. *Psychologie der Intelligenz.* Freiburg 1972[5] (1947)

PIAGET, J. *"Une expérience sur la psychologie du hasard chez l'enfant: le tirage au sort des couples."* Acta psychologica 7, 1950: 323-336

PIAGET, J. *"Wie Kinder mathematische Begriffe bilden."* aus: Pädagogische Psychologie 1 (Graumann/Heckhausen Hrsg.) Frankfurt 1973a (1953[1]): 53-61

PIAGET, J. *"Le point de vue de Piaget."* International Journal of Psychology 3; 1968: 273-280

PIAGET, J. *"Comments on mathematical education."* Developments in mathematical education. Cambridge University Press 1973b: 79-87

PIAGET, J. *Einführung in die genetische Erkenntnistheorie.* Frankfurt 1973c

PIAGET, J. *Abriss der genetischen Epistemologie.* Freiburg 1974 (197

PIAGET, J./INHELDER, B. *La genèse de l'idée du hasard chez l'enfant.* PUF Paris 1951

PIAGET, J./INHELDER, B. *Psychologie des Kindes.* Freiburg 1973[2] (1971)

PIAGET, J./SZEMINSKA, *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* Stuttgart 1972 (3) -1941-

PIRE, G. "Notion du hasard et développement intellectuel." Enfance 1958: 131-143

PIONCARÉ, H. The Foundations of science. New York 1913

POLLAK, H.O. "How can we teach applications of mathematics?" ESM 2, 1970: 393-404

POLYA, G. Mathematik und plausibles Schließen. Bd. 2 Basel 1963

POLYA, G. Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Bd. I, Basel 1966

POLYA, G. "As I read them". Develompments in mathematical Education. Cambridge Universiry Press 1973: 77-78

POPPER, K. Logik der Forschung. Tübingen 1971[4] (1934[1]).

RADE, L. The teaching of probability and statistics. Almquist & Wiksell, Wiley 1970

RADE, L. "A course in combinatorics and probability for grades 1-3." Vortrag beim: International colloquium on the theoretical problems of teaching mathematics in the primary schools. Eger 1973

RAMSEY, F. P. Truth and probability. (1926) Nachdruck in: Kyburg/Smokler 1964: 61-92

RASTRIGIN, L. A. Zahl oder Wappen? Leipzig 1973

RAUH, H. Entwicklungspsychologische Analyse kognitiver Prozesse. Weinheim 1972

READ, C. B. "Elementary probability." SSM 63, 1963: 119-132

REICHENBACH, H. Wahrscheinlichkeitslehre. Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leiden 1935

REIDT, L. /WOLFF, G. /ATHEN, H. Ergänzungsheft 2, Einführung in die Statistik. Paderborn 1955

RENYI, A. "On a new axiomatic theory of probability." Acta math. Acad. Sci. hung. 6, 1955: 285-335

RENYI, A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1966[2] (1961)

RENYI, A. Briefe über die Wahrscheinlichkeit. Basel 1969

RENYI, A. "Remarks on the teaching of probability." in: RADE 1970: 273-282

RÉVÉSZ, P. Die Gesetze der großen Zahlen. Basel 1968

REVUZ, A. Mathématique moderne - mathématique vivante. Paris 1965

REVUZ, A. Moderne Mathematik im Schulunterricht. Freiburg 1965

RICHTER, G. "Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule?" MiS 7, 1969: 210-222

RICHTER, H. "Zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung." Dialectica Lausanne 1954: 48-77

"Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung." Mathematische Annalen 128, 1954b: 305-339

RICHTER, H. "Subjektive Wahrscheinlichkeit." Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 1, 1962/63: 271-277

RICHTER, H. Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin 1966[2]

RIST, J. "Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Quinta." MNU 24, 1971: 364-367

ROBBINS, H. "The theory of probability". Insights into modern mathematics. 23-rd yearbook of the National Council of teachers of mathematics. Washington 1957.

ROSS, B.M. "Probability concepts in deaf and hearing children." CD 1966: 917-927

ROSS, B.M./LEVY, N. "Patterned predictions of chance events by children and adults." Psychological reports 4, 1958: 87-126

SANDERSTROM, H. E. "Probability in the classroom." SSM 64, 1964: 679-682

SAVAGE, L. J. The foundations of statistics reconsidered. 1961 in: Kyburg/Smokler 1964:

SAXER, W. "Beziehungen zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung." MPS 5, 1957: 49-62

SCHEEL, U. Stundenvorbereitung. Dornburg - Frickhofen 1972

SCHMETTERER, L. Grundlagen der mathematischen Statistik. Berlin 1957

SCHMIDT, J. "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im Mathematikunterricht." Tagungsbericht einer Tagung über den Stochastikunterricht in Oberwolfach im Januar 1971

SCHMIDT, S. Mathematikunterricht - nur Unterricht in und durch Mathematik?" MPS 1974: 20-45

SCHNORR, C. P. Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. Eine algorithmische Begründung. Berlin 1971

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. Probability for primary Grades. Pasadena, California 1966a

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. Probability for Intermediate grades Pasadena, California 1966b

SCHRAGE, G. "Ein Paradoxon der Wahrscheinlichkeitsrechnung?" PM 12, 1971: 309-312

SCHRAGE, G. "Strategische Spiele". ARCH 24, 1972: 75-79

SCHRAGE, G. *Die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht.* Unveröffentlichtes Manuskript 1973

SCHRAMM, H. "Zum Thema Modelle." LUZ 1, 1974: 1

SCHWAB, J. J. "Die Struktur der Naturwissenschaften". in: Ford/Pugno 1972 (1964 -1-): 55-76

SCOTT, L. *Trends in elementary school mathematics.* Chicago 1966

SEIM, G. *Der Wahrscheinlichkeitsraum im Schulunterricht.* Didaktik der Mathematik 4; 1974: 274-288

SERVAIS, W. *Sujets futures et nouvelles méthodes de l'enseignement mathématique.* CIES Congrès de Varna 1968

SHEPLER, J. L. *An exploratory study of the interaction of three elementary concepts of probability with stimuli, socioeconomic grade and IQ differences.* Technical report 114. University of Wisconsin 1970

SHULMAN, L. S. "Psychology and mathematics education." The sixty-ninth yearbook of the national society for the study of education 1970: 23-71

SIEGEL, S./ANDREWS, J. "Magnitude of reinforcement and choicebehavior in children." JEP 63, 1962: 337-341

SIGEL, I.E./HOOPER, F.H. *Logical thinking in children.* New York 1968

SIKORSKI, R. *Boolean algebras.* Berlin 1964 (1960[1])

SIME, M. "Some implications of the work of Piaget in the training of students to teach primary mathematics." Developments in Mathematical Education. Cambridge University Press 1973: 272-282

SKOWRONEK, H. *Psychologische Grundlagen einer Didaktik der Denkerziehung.* Hannover 1968

SKEMP, R. *The psychology of learning mathematics.* Harmordsworth 1971

SMITH, R. "Probability in the elementary school. *Enrichment mathematics for the grades. Twenty-seventh-yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* Washington 1963: 127-133

SOBOL, I.M. *Die Monte-Carlo-Methode.* Berlin 1971

STEGMÜLLER, W. *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie. Band I: Wissenschaftliche Erklärung und Begründung.* Berlin 1969

STEINER, G. *Mathematik als Denkerziehung.* Stuttgart 1973

STEINER, H. G. "Elementare Logik und Wahrscheinlichkeitstheorie." *MU 8 Heft 1*, 1962: 16-28

STENDER, R. "Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Schule." *MPS 4*, 1955: 270-280

STERRETT, A. "Gambling doesn't pay." *MT 3*; 1967: 210-214

STEVENSON, H.W./WEIR, M.W. "Variables affecting children's performance in a probability learning task." *JEP 57*, 1959: 403-412

STEVENSON, H.W./WEIR, M.W. "The role of age and verbalization in probability learning." *American Journal of Psychology 76*, 1963: 299-305

STEVENSON, H.W./ZIGLER, E.F. "Probability learning in children." *JEP 56*, 1958: 185-192

STONE, M. H. "The representation of boolean algebras." *Bull. Am. math. soc. 44*; 1938: 807-816

STOKA, M./THEODORESCU, R. Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Monte-Carlo-Methoden. Berlin 1972

STREHL, R. *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Freiburg 1974

STROHHÄCKER, E. "Drei Beispiele zum Gesetz der Serie." MNU 23, 1970: 338-342

THOM, R. "Modern mathematics: does it exist?" Developments in Mathematical Education. Cambridge University Press 1973: 194-209

TIMERDING, H.E. (Hrsg.) Versuch zur Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Th. Bayes. Leipzig 1908

TODHUNTER, I. A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. London 186

TVERSKY, A./KAHNEMANN, D. "Availability: a heuristic for judging frequency and probability." Cognitive psychology 5; 1973: 207-232

UHLMANN, W. Statistische Qualitätskontrolle. Stuttgart 1966

VARGA, T. "Höhere Mathematik in der Unterstufe." MiS 5; 1967: 355-358

VARGA, T. "Combinatorials and probability for young children." Journal of structural learning 1969

VARGA, T. "Logic and probability in the lower grades." ESM 4, 1972: 346-357

VENN, J. The logic of chance. (1866) Nachdruck in: Kyburg-Smokler 1964

VENN, J. The subjective side of probability. 1888 Nachdruck in: Kyburg-Smokler 1964

VIETORIS, L. "Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit." Monatshefte für Mathematik 52, 1948: 55-85

VIETORIS, L. "Wie kann Wahrscheinlichkeit definiert werden?" Studium generale, 1951: 69-78

VOGEL, W. "Wahrscheinlichkeitsmodelle." MPS 9, 1962/63: 169-189

WAERDEN, B. L. van der "Der Begriff Wahrscheinlichkeit." Studium generale, 1951: 65-68

WAERDEN, B. L. van der Erwachende Wissenschaft. Basel 1956

WAERDEN, B. L. van der Mathematische Statistik. Berlin 1965[2]

WAERDEN, B. L. van der Einfall und Überlegung. Basel 1968 (1954[1])

WAGEMANN, E. Die Zahl als Detektiv. Hamburg 1938

WAGEMANN, E. Narrenspiegel der Statistik. München 1950

WAISMANN, F. "Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs." Erkenntnis 1, 1930: 232-

WALLIS, W.A./ROBERTS, H. Methoden der Statistik. Hamburg 1966

WEIR, M. W. "The effects of age and instruction on children's probability learning." CD 33, 1962: 729-735

WELLNITZ, K. Klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig 196
Moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung. Braunschweig 1964b

WELLNITZ, K. Kombinatorik. Braunschweig 1965[4]

WERNER, H. "The concept of development from a comparative and organismic point of view." in: D.B. Harris (Hrsg.) The concept of development. Minneapolis 1957: 125-148

WESTCOTT, M. R. Towards a contemporary psychology of intuition. New York 1968

WILINSON, J.D./NELSON, O. "Probability and statistics: trial teaching in 6 th grade. AT 13, 1966: 100-106

WINKELMANN, B. "Kritische Anmerkungen zu R. Thom: 'Moderne Mathematik: Gibt es das? " Didaktik der Mathematik 4; 1973: 264-274

WINTER, H. — "Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung." Funkkolleg Mathematik 2. Frankfurt 1971a: 286-359

WINTER, H. — "Zufall und Wahrscheinlichkeit." SWF-Sendereihe: Didaktik der Mathematik, 1971b: 56-60

WINTER, H. — Erfahrungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Manuskript zu einer Rundfunksendung. 1971c

WINTER, H. — "Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. Beiträge zum Lernzielproblem. Strukturförderung im Bildungswesen des Landes NRW Heft 16 Ratingen 1972a: 67-95

WINTER, H. — "Gedanken zur Modernisierung des Sachrechnens in den Klassen 7 bis 10 der Hauptschule." in: Mathematik in der Hauptschule II, Stuttgart 1972b: 99-140

WINTER, H./ZIEGLER, T. — Neue Mathematik (Schulbuch)
Bd. 2 Dortmund, 1971a
Bd. 3 Dortmund, 1972
Bd. 4 Dortmund, 1973a
Bd. 5 Dortmund, 1969
Bd. 6 Dortmund, 1970a
Bd. 7 Dortmund, 1971b

WINTER, H./ZIEGLER, T. — Lehrerheft zu Bd. 1 Hannover 1970b

WINTER, H./ZIEGLER, T. — Lehrerheft zu Bd. 2 Hannover 1971c

WINTER, H./ZIEGLER, T. — Lehrerheft zu Bd. 3 Hannover 1973c

WINTER, H./ZIEGLER, T. — Einführung in das "matema"-Mengenspiel. Hannover 1970c

WITTGENSTEIN, L. — Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Oxford 1964

WITTMANN, E. "Die Bedeutung der Piagetschen "abstraction réfléchissante" für die Entwicklung der mathematischen Formen." Die Deutsche Schule 61, Heft 9, 1969: 537-542

WITTMANN, E. "Zum Begriff 'Gruppierung' in der Piagetschen Psychologie." Beiträge zum Mathematikunterricht 1972. Hannover 1973: 203-222

WITTMANN, E. Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974a

WITTMANN, E. Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft." ZDM 3; 1974b: 119-121

WITTMANN, E. "Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik." 1975 (Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hannover-Dortmund 1975)

WOLFF, G. Handbuch der Schulmathematik, Band 1. Hannover 1966 (196

WOITSCHACH, M. Strategie des Spiels. Hamburg 1971

WRIGHTON, R. F. Elementary principles of probability and information. London 1973

YOST, P.A./SIEGEL, A./ANDREWS, J. "Nonverbal probability judgments by young children." CD 33, 1962: 769-780

ZILSEL, E. Das Anwendungsproblem. Ein philosophischer Versuch über das Gesetz der großen Zahlen und die Induktion. Leipzig 1916

L e b e n s l a u f

Am 6.6.1944 wurde ich, Dietger Heitele, als zweiter Sohn des Schreiners Sebastian Heitele und seiner Ehefrau Aloysia in Mengen a.D geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule in Mengen und des Gymnasiums in Riedlingen a.D. legte ich im Frühjahr 1963 die Reifeprüfung ab. Im Sommersemester des gleichen Jahres begann ich an der Universität Tübingen mit dem Studium der Mathematik und der Physik, das ich an den Universitäten Kiel (SS 65 - SS 66), Heidelberg (WS 1966/67) und Bochum (SS 67 - WS 68/69) fortsetzte.

Nach dem I. Philologischen Staatsexamen in Mathematik und Physik am 11.2.1969 blieb ich zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Bochum, nahm dann für ein Jahr lang eine volle Lehrtätigkeit am Gymnasium auf und begann im Anschluß daran mit der Referendarausbildung, die ich im Juni 1971 mit dem II. Philologischen Staatsexamen abschloß.

Im Juli 1971 trat ich am Seminar für Didaktik der Mathematik der Pädagogischen Hochschule Ruhr, Abteilung Dortmund, eine Stelle als wissenschaftlicher Angestellter an, die ich bis Juni 1975 innehatte. In dieser Zeit beteiligte ich mich an der Ausbildung der Lehramtsstudenten und fertigte die vorliegende Dissertation an. Seit Juli 1975 bin ich am gleichen Seminar als wissenschaftlicher Assistent tätig.